מרוכבות - תרגול 6

מועד א' תשס"ח

3. חשבו $\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)dz$ כאשר γ היא המסילה הנתונה ע"י

$$z(t)=\sin 2t+i(4\cos t+2t):0\le t\le \frac{\pi}{2}$$

פתרון: נרצה להגיד שיש פונקציה קדומה $\frac{z^2}{2}+\log z$. אבל יש להיזהר. $\log$ אינה פונקציה. צריכים לבחור ענף של הלוגריתם ולוודא ש-γ נשארת בתחום שבו הענף גזיר. ניקח את $\frac{z^2}{2}+Log(z)$ כאשר ב-Log הארגומנט נמצא בקטע $(-\pi,\pi]$. הענף בעייתי בציר ה-x השלילי. נבדוק שהמסילה לא עוברת שם. $\sin 2t\ge 0$ ויש שוויון אך ורק עבור $t_{1,2}=0,\frac{\pi}{2}$ בשני המקרים הללו מקבלים $4\cos t+2t\ne 0$ ולכן הכל בסדר.

בסה"כ האינטגרל הוא

$$\left[\frac{z^2}{2}+Logz\right]_{4i}^{\pi i}=-\frac{\pi^2}{2}+Log(\pi i)-(-8+Log(4i))=-\frac{\pi^2}{2}+\ln\pi+i\frac{\pi}{2}-\left(-8+\ln 4+i\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{4}+8-\frac{\pi^2}{2}$$

הגדרה: האינטגרל $\int_\gamma f(z)|dz|$ מוגדר ע"י $\int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$.

תרגיל: יהיו $\rho>0, a\in\mathbb{C}$ כך ש $|a|\ne\rho$, חשבו $\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$

פתרון: פרמטריזציה עבור העקומה היא $z(t)=\rho e^{it}, 0\le t\le 2\pi$.

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\int_0^{2\pi}\frac{|i\rho e^{it}|dt}{|\rho e^{it}-a|^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\rho dt}{(\rho e^{it}-a)\overline{(\rho e^{it}-a)}}=\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\rho e^{it}-a)(\rho e^{-it}-\bar{a})}=$$

$$\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\rho^2-(\bar{a}\rho e^{it}+a\rho e^{-it})+|a|^2}=\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\rho^2-(\bar{a}\rho e^{it}+\overline{\bar{a}\rho e^{it}})+|a|^2}=\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\rho^2-2\operatorname{Re}(\bar{a}\rho e^{it})+|a|^2}$$

לצורך המשך החישוב נרשום את a בצורה פולרית: $a=re^{i\phi}$ ואז $|a|^2=r^2$ $\bar{a}\rho e^{it}=r\rho e^{i(t-\phi)}$

.

האינטגרל הוא $\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\rho^2-2r\rho\cos(t-\phi)+r^2}$. מתכונות המחזוריות של הקוסינוס, הערך של ϕ לא משפיע על האינטגרל. וניקח בה"כ $\phi=0$.

$$\rho\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\rho^2-2r\rho\cos(t)+r^2}=\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\cos(t)}$$

נפתח את $\frac{1}{1-\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\cos(t)}$ לטור הנדסי. זה חוקי כי המנה $q=\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\cos(t)$ קטנה מאחד בערך מוחלט. הסבר: $r^2+\rho^2-2r\rho\geq 0$.

אם כך, $\frac{1}{1-\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\cos(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^n\cos^n t$, והטור אף מתכנס במ"ש.

$$\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\cos(t)}=\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^n\cos^n t\right]dt=\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^n\cos^n t dt=$$

$$=\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^n\int_0^{2\pi}\cos^n t dt$$

יש לחשב את $\int_0^{2\pi}\cos^n dt$. ע"פ אוילר

$$\int_0^{2\pi}\cos^n dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}\right)^n dt=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}e^{it}\right)^k\left(\frac{1}{2}e^{-it}\right)^{n-k}dt=\frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}dt$$

תזכורת: $\int_0^{2\pi}e^{imt}dt=\begin{cases}0 & m\neq 0\\ 2\pi & m=0\end{cases}$. ולכן המקרה היחיד שבו לא נקבל אפס באינטגרל הוא אם יש k עבורו $2k-n=0$. זה יכול לקרות רק אם $n=2N$ הוא זוגי. ובמקרה זה מקבלים $\int_0^{2\pi}\cos^n dt=\int_0^{2\pi}\cos^{2N} dt=\frac{1}{2^{2N}}\binom{2N}{N}2\pi$. נחזור לתרגיל ונסכום רק על האינדקסים הזוגיים

$$\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^n\int_0^{2\pi}\cos^n tdt=\frac{\rho}{\rho^2+r^2}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^{2N}\frac{1}{2^{2N}}\binom{2N}{N}2\pi=\frac{2\pi\rho}{\rho^2+r^2}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^{2N}\binom{2N}{N}$$

כדי לחשב את הטור, נעזר בטור טיילור של $f(x)=(1-x)^{-1/2}$. ובכן $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2},\ f''(x)=\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-x)^{-5/2},\ f'''(x)=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-x)^{-7/2},\ f^{(n)}(0)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}=\frac{(2n)!}{2^n 2^n n!}$$

כך ש- $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. כלומר $x^n \binom{2N}{N} \frac{1}{2^{2N}} \sum_{N=0}^{\infty} = (1-x)^{-1/2}$ אם נציב

$x = \left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^2$ נקבל $\left[1-\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^2\right]^{-1/2} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2N}}\binom{2N}{N}\left[\left(\frac{2r\rho}{\rho^2+r^2}\right)^2\right]^N$.

בסה"כ $\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi\rho}{|\rho^2-r^2|}$.

תזכורת: נוסחת קושי – תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול Δ, ותהי γ מסילה סגורה ב-Δ . אזי

לכל נקודה $z_0 \notin \gamma$ $Ind_\gamma(z_0)\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

תרגיל (מועד ב' תשס"ט)

חשבו $\int_{|z|=2}\frac{\bar{z}+z^2}{z+3}dz$ (כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון)

פתרון: על המעגל $|z|=2$ מתקיים $\bar{z} = 4/z$. אם כך $\frac{\bar{z}+z^2}{z+3} = \frac{4/z + z^2}{z+3} = \frac{4+z^3}{z(z+3)}$ נשתמש

בפירוק לשברים חלקיים:

$\frac{1}{z(z+3)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+3}$ מקבלים $A = 1/3, B = -1/3$ האינטגרל הוא

$$\int_{|z|=2}\frac{\bar{z}+z^2}{z+3}dz = \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{4+z^3}{z}dz - \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{4+z^3}{z+3}dz$$

האינטגרל הראשון הוא $8\pi i$ והשני 0. מקבלים $\frac{8\pi i}{3}$

[אם יש זמן]

תרגיל: העזרו במשפט קושי כדי לחשב את האינטגרל $\int_C \left(e^{\cos z}+z^3\right)zdz$ כאשר C הוא חצי

המעגל עם מרכז בראשית וברדיוס 1 המחבר את 1 ו-1- נגד כיוון השעון.