

תרגיל בית 6

שאלה 1

- א. נתבונן בתמורות $(123), (132)$. מצאו תמורה ב- S_4 שמצמידה אותן. לאחר מכן הראו שהן אינן צמודות ב- A_4 . הראו שהן כן צמודות ב- A_5 .
- ב. מצאו את מחלקות הצמידות $conj(123), conj(132)$ ב- A_4 .

שאלה 2

תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:

- א. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A = B$.
- ב. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.
- ג. אם $G \cong G/A$ אזי A היא תת-החבורה הטריטיואלית.

שאלה 3

תהי $Q_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת על-ידי:

$ijk = k^2 = j^2 = i^2 = -1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקוטרניונים**.
לוח הכפל שלה הוא:

\cdot	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

- א.** מצאו את כל תת החבורות של Q_8 .
- ב.** הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא נורמלית. (רמז: בדקו את האינדקס של תת החבורות).
- ג.** הוכיחו ש- Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4 .

שאלה 4

תהיינה $A, B, C \triangleleft G$ כך ש- $B \subseteq A$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B .

שאלה 5

- א.** הוכיחו שמתקיים $GL_2(\mathbb{Z}_7)/SL_2(\mathbb{Z}_7) \cong U_7$.
- ב.** מצאו את כל תתי החבורות של $GL_2(\mathbb{Z}_7)$ המכילות את $SL_2(\mathbb{Z}_7)$.

בהצלחה!