

## בחינה סופית בחשבון אינפניטסמלי 2 --- מועד א' תשע"ג

מרצה: שמעון ברוקס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

1. תהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה (ממש). סדרו את הערכים הבאים ע"פ סדר עולה, מהנמוך ביותר לגדול ביותר:

$$f(0) *$$

$$f(1) *$$

$$\frac{1}{3} \left( f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) *$$

$$\frac{1}{3} \left( f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right) *$$

$$\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right) *$$

$$\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i}{300}\right) *$$

$$\int_0^1 f(x) dx *$$

2. א. הוכח כי אם  $0 < a < b$  אזי:

$$\int_a^b \ln(x) dx \leq \frac{b^2 - a^2}{2}$$

ב. חשב את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin^2(3t) dt$$

3. א. האם האינטגרל

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln(x)}$$

מתכנס או מתבדר?

ב. חשב את האינטגרל הלא-מסויים:

$$\int \left( e^x \cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) dx$$

4. א. הוכח או הפרך: אם  $\{f_n\} \rightarrow f \equiv 0$  (התכנסות נקודתית לפונקציה

הקבועה  $f(x) = 0$  לכל  $x$ ) ב- $[0,1]$ , אזי הסדרה

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} f_n(x)$$

חסומה כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

ב. הוכח או הפרך: אם  $\{f_n\}$  מתכנס במידה שווה לפונקציה הקבועה

$f \equiv 0$ , אזי לכל  $n$  מספיק גדול מתקיים

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

5.א. תהי  $f$  בעלת נגזרת רציפה ב- $[0,1]$ . הוכח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \cos(2\pi nx) dx = 0$$

ב. תן דוגמא לשני טורי חזקות עם אותו רדיוס התכנסות, אך תחום התכנסות שונה (כלומר, רדיוסי ההתכנסות זהים אך קיימת נקודה שבה אחד הטורים מתכנס והשני מתבדר).

6.א. מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציה  $f(x,y) = xy$  על תחום

$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1$$

האליפסה

ב. סמן (בקירוב) את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה  $f(x,y) = x + y$  על התחום המצוייר, והסבר!

