תרגיל בית 3

1. בכל אחד מהתרגילים הבאים קבעו אם $\mathbf{F}$ הינו שדה משמר. אם השדה משמר מצאו את פונקציית הפוטנציאל ϕ

   א. $\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

   ב. $\mathbf{F}(x,y)=x^2y\mathbf{i}+5xy^2\mathbf{j}$

   ג. $\mathbf{F}(x,y)=x\ln y\mathbf{i}+y\ln x\mathbf{j}$

פתרון:

א. נבדוק את התנאי $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$: כאן $f=x,g=y$ ולכן $\frac{\partial f}{\partial y}=0=\frac{\partial g}{\partial x}$ ומכאן שהשדה משמר. על מנת למצוא את ϕ נבצע אינטגרציה $\phi=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+k(y)$. נגזור לפי y ונקבל כי $k'(y)=y \Leftarrow k(y)=\frac{1}{2}y^2$ מכאן כי $\phi=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+K$.

ב. לא שדה משמר.

ג. באותו האופן של סעיף א' נקבל כי השדה משמר וכי $\phi=x\cos y+y\sin x+K$.

2. בכל אחד מהתרגילים הבאים הראו כי האינטגרל איננו תלוי במסלול ושחשבו אותו.

   א. $\int_{(1,2)}^{(4,0)}3ydx+3xdy$

   ב. $\int_{(0,0)}^{(3,2)}2xe^ydx+x^2e^ydy$

   ג. $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)}2xy^3dx+3y^2x^2dy$

פתרון:

א. בדיקה פשוטה מראה לנו כי שהשדה $\mathbf{F}(x,y)=3y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}$ הינו שדה משמר וכי פונקציית הפוטנציאל לו הינה $\phi(x,y)=3xy+K$. לכן נקבל כי

$$\int_{(1,2)}^{(4,0)}3ydx+3xdy=\phi(4,0)-\phi(1,2)=0-6=-6.$$

ב. $9e^2$

ג. 32

3. יהי $F(x,y)=e^y\mathbf{i}+xe^y\mathbf{j}$

א. הראו שהשדה הוקטורי $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר בכל המישור xy .

ב. מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע מ $\left(1,0\right)$ ל $\left(-1,0\right)$ על החלק העליון של מעגל היחידה.

פתרון:

א. לפי הנתון ומה שראינו בתרגול נסמן $f\left(x,y\right)=e^{y}$ ו $g\left(x,y\right)=xe^{y}$ ומכאן כי $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{y}=\frac{\partial g}{\partial x}$ לכל $\left(x,y\right)$ ולכן $\mathbf{F}$ הינו שדה משמר בכל המישור.

ב. לפי הנוסחה של עבודה שלמדנו, העבודה שהשדה מבצע הינה: $W=\int_{C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C}e^{y}dx+xe^{y}dy$. מכיוון שהשדה הינו משמר, לא צריך באמת לחשב את האינטגרל הנ"ל וזאת כיוון שמסלול עליו אנו עושים את האינטגרציה אינו משנה. למעשה,

$$W=\int_{(1,0)}^{(-1,0)}e^{y}dx+xe^{y}dy=\phi\left(-1,0\right)-\phi\left(1,0\right)$$

כאשר ϕ הינה פונקציית הפוטנציאל של השדה. על מנת למצוא את פונקציית הפוטנציאל נעבוד בדומה לאופן שבו עשינו בתרגול. נסתכל על $\frac{\partial\phi}{\partial x}=e^{y}$ ונקבל כי $\phi=\int e^{y}dx=xe^{y}+k\left(y\right)$. נגזור ונקבל

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=xe^{y}+k'\left(y\right)=xe^{y}.$$

ומכאן ש $k'\left(y\right)=0$ ולכן $k\left(y\right)=K$. ובסה"כ $\phi=xe^{y}+K$. חזרה לעבודה של השדה - $W=\phi\left(-1,0\right)-\phi\left(1,0\right)=\left(-1\right)e^{0}-1e^{0}=-2$.