תרגיל 8

1. יהי R חוג gcd. הוכיחו: $(a,b)\sim 1 \implies (a^2,b^2)\sim 1$.

פתרון:

$(a,b)\sim 1$ ו$(a,b)\sim 1$, ולכן $(a,b^2)\sim 1$. (מתרגיל שעשינו בכיתה). כעת, $(a,b^2)\sim 1$ ו$(a,b^2)\sim 1$, ולכן $(a^2,b^2)\sim 1$.

2. הגדרה: יהי R חוג, ו$a,b\in R$. נגיד שm הוא כפולה משותפת מינימלית של a,b (כמ"מ, lcm) אם $a,b|m$, ולכל c כך ש $a,b|c$ מתקיים: $m|c$. הוכיחו: m הוא כמ"מ של a,b אמ"ם $Ra\cap Rb=Rm$.

פתרון:

ראשית, נניח ש$[a,b]=m$. אזי $m\mid a,b$. לכן $Rb\subseteq Ra\wedge Rm\subseteq Rm$. מכאן: $Ra\cap Rb\subseteq Rm$. מצד שני, יהי $x\in Ra\cap Rb$. אז $x\mid a,b$. לכן $x\mid m$. כלומר, $x\in Rm$. מסקנה: $Ra\cap Rb=Rm$.

מצד שני

נניח $Ra\cap Rb=Rm$. אז ברור ש$m\mid a,b$. מצד שני, יהי x כך $x\mid a,b$. אז $x\in Ra\cap Rb$. מכאן ש$x\in Rm$. לכן $x\mid m$.

3. אם $[a,b]=m$ קיים אז (a,b) קיים והוא שווה ל$\dfrac{ab}{m}$.

(א) הוכחה: ברור ש$a,b\mid\dfrac{ab}{m}$. הסבר: $m\mid a,b$. לכן, למשל, $m=ac$. אז $b\mid\dfrac{b}{c}=\dfrac{ab}{m}$.

אם $a,b\mid x$ אז $Rm=Ra\cap Rb\in\dfrac{ab}{x}$. לכן $\dfrac{ab}{x}\mid m$. מכאן ש $\dfrac{ab}{m}\mid x$.

4. טענה: יהי R חוג gcd. אז $\dfrac{ab}{(a,b)}$ הוא כמ"מ.

(א) הוכחה: נניח ש$x\mid a,b$. צ"ל ש$x\mid\dfrac{ab}{(a,b)}$. נכתוב $x=ay$. אז $ay\mid b$ ולכן לפי תרגילים קודמים $(b,y(a,b))=(b,(ya,yb))=((b,yb),ya)=(b,ya)=b$.

לכן $ay(a,b)\mid ab$. קיבלנו ש $x=ay\mid\dfrac{ab}{(a,b)}$. הכיוון השני טריוויאלי.

5. אם $[b,c]$ קיים אז לכל $a\neq 0$, $[ab,ac]$ קיים ושווה ל$a[b,c]$.

(א) הוכחה: ברור ש$a[b,c]\mid ab,ac$. נניח ש$x\mid ab,ac$. נכתוב $x=abb'=acc'$. אז $\dfrac{x}{a}\mid b,c$ ולכן $\dfrac{x}{a}\mid[b,c]$. ו$x\mid a[b,c]$.