תורת הקבוצות, מועד א, תשפא.

מרצה: תמר בר-און
מתרגל: רועי שליו.
משך המבחן: שעתיים.
חומר עזר: אסור.

1. נסמן ב$<_{\mathbb{Q}}$ את הסדר הלינארי הרגיל על $\mathbb{Q}$, וב$<_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$ את הסדר המילוני על $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. כלומר,

$$(a,b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (c,d) \iff (b <_{\mathbb{Q}} d) \vee ((b = d) \wedge a <_{\mathbb{Q}} c)$$

הוכיחו/הפריכו: $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}) \cong (\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ (איזומורפיזם סדר)
ראשית, ברור ש$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ בן מניה. בנוסף, הוא לינארי. אין לו איבר ראשון ואחרון, כי לכל (a,b) מתקיים $(a,b-1) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (a,b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (a,b+1)$. כמו כן, הסדר צפוף כי לכל $(a,b) < (c,d)$ מתקיים:

אם $b < d$ אז $(a,b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (a, \frac{b+d}{2}) < (a,d)$.

ואם $b = d$ אז $a < c$ ואז ניקח $(a,b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (\frac{a+c}{2}, b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (c,b)$

לכן, לפי משפט מההרצאה, $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$ איזומורפי סדר ל$(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$.

2. הוכיחו שω^2 הוא הסודר המינימלי שמקיים $\omega + \alpha = \alpha$
ראשית, נוכיח שω^2 מקיים זאת. אכן, $\omega + \omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega\cdot\omega = \omega^2$.
כעת, יהי $\alpha < \omega^2$. נזכר כי $\omega^2 = \omega\cdot\omega = \omega\sup_{n<\omega}\{n\} = \sup \omega\cdot n$
אז אם $\alpha < \omega^2$ זה אומר שקיים n מינימלי כך ש$\alpha < \omega\cdot n$.
אם $n = 1$, אז α סופי וברור ש$\omega + \alpha \neq \alpha$.
אחרת, $\omega\cdot(n-1) \leq \alpha < \omega\cdot n$
נקבל ש $\alpha < \omega\cdot n = \omega + \omega(n-1) \leq \omega + \alpha$

3. תהי $f : [\omega_1]^{<\omega} \to \omega_1$. נגדיר את C_fלהיות הקבוצה של כל ה$\alpha \in \omega_1$ כך שלכל כך שלכל קבוצה סופית של איברים $\beta_1, ..., \beta_n$ שקטנים מα, מתקיים $f(\beta_1, ..., \beta_n) < \alpha$. כלומר:

$$C_f = \{\alpha \in \omega_1 : \beta_1, .., \beta_n < \alpha \Longrightarrow f(\beta_1, .., \beta_n) < \alpha\}$$

הוכיחו שC_f היא סל"ח.
ראשית נראה שהיא סגורה. נניח ש$\langle \alpha_n | n < \omega\rangle \subseteq C_f$ סדרה עולה, ויהי $\alpha = \sup\{\alpha_n\}$.
יהיו $\beta_1, .., \beta_n < \alpha$. לכל i יש j_i כך ש $\beta_i < \alpha_{j_i}$. נקח $i = \max\{j_i\}$. אז $\beta_1, .., \beta_n < \alpha_i$.
לכן $f(\beta_1, .., \beta_n) < \alpha_i < \alpha$.

לא חסומה: יהי $\alpha \in \omega_1$. אם $\alpha \in C_f$ סיימנו. אחרת נסתכל על $\alpha_1 = \sup\{f(\beta_1, .., \beta_n) | n < \omega, \beta_1, .., \beta_n < \alpha\} + 1$. נשים לב שהסופרימום קיים כי זאת קבוצה בת מניה.

נמשיך באותו אופן ונגדיר סדרה α_n עולה ממש (אלא אם כן באיזשהו שלב קיבלנו $\alpha_n \in C_f$ ואז אפשר לעצור). נקח את $\beta = \sup\{\alpha_n\}$. יהיו $\beta_1, .., \beta_n < \beta$. אז יש i כך ש$\beta_1, .., \beta_n < \alpha_i$. לפי הגדרת הסדרה $f(\beta_1, .., \beta_n) < \alpha_{i+1} < \beta$.

4. נגדיר ברקורסיה על ON את הסדרה הבאה:
$\beth_0 = \omega$
$\beth_{\alpha+1} = \beth_\alpha^{cof(\beth_\alpha)}$
עבור סודר גבולי $\beta \neq 0$, $\beth_\beta = \sup_{\alpha<\beta} \beth_\alpha$
הוכיחו שקיים סודר α כך ש$\beth_\alpha = \alpha$.
נבנה סדרה ברקורסיה:

$$\alpha_0 = \omega$$

$$\alpha_{n+1} = \beth_{\alpha_n}$$

זאת סדרה עולה ממש לכן הסופרימום שלה, $\alpha = \sup\{\alpha_n\}$ הוא סודר גבולי. אז נקבל

$$\beth_\alpha = \sup\{\beth_{\alpha_n}\} = \sup\{\alpha_{n+1}\} = \alpha$$

5. הוכיחו כי לא קיים מונה κ המקיים $2^\kappa = \aleph_{\aleph_{\omega^2}}$
ראשית ברור שאם κ סופי, אז 2^κ סופי ולכן לא שווה ל $\aleph_{\aleph_{\omega^2}}$. לכן, נניח $\kappa \geq \omega$. ממשפט מההרצאה $cof(2^\kappa) > \kappa \geq \omega$. אבל ω^2 גבולי וגם $\aleph_{\omega^2}$ גבולי, לכן

$$cof(\aleph_{\aleph_{\omega^2}}) = cof(\aleph_{\omega^2}) = cof(\omega^2) = \omega$$

6. יהיו $(A, <_A), (B, <_B)$ קס"חים לא ריקים. נגדיר על $A \times B$ את יחס הסדר הבא:

$$(a, b) <_{A\times B} (c, d) \iff a <_A c \wedge b <_B d$$

(א) הפריכו את הטענה הבאה:

$$cof(A \times B, <_{A\times B}) = \max\{cof(A, <_A), cof(B, <_B)\}$$

(ב) נניח שלפחות לאחת מהקבוצות A וB יש קופינליות אינסופית. הוכיחו

$$cof(A \times B, <_{A\times B}) = \max\{cof(A, <_A), cof(B, <_B)\}$$

א. נקח $A = \{1, 2, 3\}$ עם היחס $1 < 2, 1 < 3$. ו$B = \{a, b, c\}$ עם היחס

$a < b, a < c$. אז הקופינליות של A שווה לקופינליות של B שווה ל2. הקופינליות של $A \times B$ שווה 4

ב. יהיו $C \subseteq A, D \subseteq B$ תתי קבוצות קופינליות מעוצמה מינימלית. קל לראות ש$C \times D$ קופנלית ב$A \times B$, לכן $cof(A \times B) \leq cof(A)cof(B) = \max\{cof(A), cof(B)\}$

מצד שני, תהי $E \subseteq A \times B$ תת קבוצה קופינלית מעוצמת הקופינליות. אזי $\pi_A(E)$ קופינלית בA ו$\pi_B(E)$ קופינלית בB. לכן

$$cof(A), cof(B) \leq |E| = cof(A \times B)$$

כלומר,

$$\max\{cof(A), cof(B)\} \leq cof(A \times B)$$