פתרון תרגיל 3

<u>שאלה 1</u>

א. קיים שיכון איזומטרי למשל הפונקציה $f:\left\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}:\ n\in\mathbb{N}\right\}\to\mathbb{Q}\cap(2004,\infty)$

המוגדרת ע"י $f\left(x=\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}\right)=2005-\sqrt{3}+x=2005-\frac{n}{2n+5}$ היא שיכון איזומטרי

כי:

$$\left|\left(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5}\right)\right|=\left|\left(2005-\frac{n}{2n+5}\right)-\left(2005-\frac{m}{2m+5}\right)\right|=\left|\frac{m}{2m+5}-\frac{n}{2n+5}\right|$$

ב. לא קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_9)$ כי למשל $d_5(7,2)=\frac{1}{5}$ אבל לא קיימות

נקודות ב $(\mathbb{Z},d_9)$ שהמרחק ביניהן $\frac{1}{5}$ (למה?).

<u>שאלה 2</u>

א. נניח שקיימת $A\supseteq\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל x. אזי לכל

היותר

רק איבר אחד של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא x. אם נזרוק אותו מהסדרה המקורית (בהנחה

שבכלל

נמצא בסדרה המקורית) נקבל תת סדרה של הסדרה המקורית (שהפעם נמצאת

כולה ב

$A\setminus\{x\}$) המתכנסת ל x. לכן x נק' הצטברות של A.

בכיוון ההפוך נניח x נק' הצטברות של A אזי

קיימת $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ המתכנסת ל x. נראה שקיימת תת סדרה $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ שכל

איבריה שונים וכמובן גם היא תתכנס ל x. נגדיר $n_1=1$, $n_2=\min\{n\mid n>1\wedge x_n\neq x_1\}$

ברור שהמינימום קיים כי מדובר בתת קבוצה לא ריקה של טבעיים (הקבוצה לא ריקה כי

אחרת נקבל שכל איברי הסדרה המקורית שווים ל x_1 ומצד שני הסדרה מתכנסת ל x $x_1\neq x$).

נגדיר $n_3=\min\left\{n\mid n>n_2\wedge x_n\notin\left\{x_{n_1},x_{n_2}\right\}\right\}$. גם n_3 מוגדר היטב כי הקבוצה אינה ריקה.

אחרת, החל ממקום מסוים כל האיברים הם x_{n_1} או x_{n_2} ואז לסדרה המקורית קיימת בהכרח

תת סדרה קבועה שכל איבריה הם x_{n_1} או שקיימת לה תת סדרה שכל איבריה הם x_{n_2} ובכל

מקרה תת סדרה זו לא תוכל להתכנס ל x בסתירה לכך שהסדרה המקורית מתכנסת ל x.

כך, באופן אינדוקטיבי נגדיר $n_{k+1}=\min\left\{n \mid n>n_k \wedge x_n \notin \left\{x_{n_1},x_{n_2},\dots,x_{n_k}\right\}\right\}$. בדומה לנימוק הקודם, הקבוצה אינה ריקה והמינימום מוגדר היטב לכל k. ברור גם שזו סדרה עולה של אינדקסים ולכן בנינו באמת תת סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל- x.

ב. $\Rightarrow$: נבנה סדרה $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \setminus \left\{x\right\}$ המתכנסת ל x. עפי" ההנחה נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \neq x_n \in B\left(x,\frac{1}{n}\right) \cap A$. ברור ש $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל x.

$\Leftarrow$: עפ"י סעיף א קיימת $A \supseteq \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל x ולכן לכל $r>0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n \in B(x,r)$. מכאן $B(x,r)\cap A \supseteq \left\{x_n\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ תת קבוצה אינסופית וקיבלנו הדרוש.

<u>שאלה 3</u>

א. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים מספר רציונלי גדול מ r וקטן מ $r+\varepsilon$.

ב. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $\left[0,1\right]$. אמנם,לכל $a \in (0,1)$ הסדרה $\left\{a+\frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב $(0,1)\setminus\left\{a\right\}$ ומתכנסת ל a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1-\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$.

לבסוף, לכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש $1<r$ או $r<0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. שכן לא ניתן לבנות סדרה ב $(0,1)$ שתתכנס ל r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0<x_n<1$ ו $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ אזי $0 \leq a \leq 1$).

<u>שאלה 4</u>

$A'=\left\{0\right\}$: ברור ש $0 \in A'$ שכן $\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$ ואיברי הסדרה שונים מ 0. נוכיח שאין נקודות הצטברות נוספות ל A. נניח $x_n \subseteq A$ וכן $x_n \to x$. ניתן לסדר את איברי x_n בסדר יורד (למה?) ולקבל בצורה זו סדרה y_n ומכיון ששינוי סדר איברים בסדרה לא משפיע על

ההתכנסות נקבל $y_n \to x$. מצד שני כעת, הסדרה y_n היא תת סדרה של הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

ולכן מכיון ש $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז גם $y_n \to 0$ ומיחידות הגבול נסיק שבהכרח $x=0$.

$A''=\varnothing$: נובע מיידית מכך שהסדרה היחידה שמוכלת ב $A'=\{0\}$ היא הסדרה הקבועה (שכל איבריה שווים ל 0) לכן לא קיימת נקודת הצטברות ל A' (למה?) ומכאן $A''=\varnothing$.

<u>שאלה 5</u>

א. כל מישור הוא מהצורה $Ax+By+CZ+D=0$.

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z)=Ax+By+CZ+D$. מתקיים $f^{-1}\left(\{0\}\right)=\{(x,y,z)\mid Ax+By+CZ+D=0\}$ מכיון ש $\{0\}$ סגור ב $\mathbb{R}$ ו- f רציפה הרי ש $f^{-1}\left(\{0\}\right)$ (שהוא המישור) סגור ב $\mathbb{R}^3$.

ב. $B=f^{-1}\left(-\infty,0\right)$ באשר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ הפונקציה הרציפה $f(x,y,z)=3e^x-35y^5-17y-z^2$ ולכן B פתוחה כתמונה הפוכה של פתוחה (תחת פונקציה רציפה).

ג. פונקצית הדטרמיננטה $\det:M_n\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$ רציפה ומתקיים $\det^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)=GL_n\left(\mathbb{R}\right)$ מכיון ש $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל הדרוש.

<u>שאלת בונוס</u>

קל להוכיח כי לכל $0<\varepsilon<2$ הפונקציה $f_\varepsilon:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ המוגדרת כך:

$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}2-\frac{4}{\varepsilon}x & 0\le x\le\frac{\varepsilon}{2}\\ 0 & \frac{\varepsilon}{2}\le x\le 1\end{cases}$ מקיימת $\max\left\{\left|f(x)\right|:\quad x\in\left[0,1\right]\right\}=2$ וכן $\int_0^1\left|f_\varepsilon(x)\right|dx<\varepsilon$.

וכן שהיא רציפה.

$B_{d\max}(0,1)$ (במרכז אפס אנו מתכוונים לפונקציית האפס) פתוחה ב $\left(C[0,1],d_{\max}\right)$ ככדור פתוח במרחב. אבל, $B_{d\max}(0,1)$ אינה פתוחה ב $\left(C[0,1],d_1\right)$. אמנם, נניח בשלילה ש- $B_{d_{\max}}\left(0,1\right)$ קבוצה פתוחה ב-$\left(C[0,1],d_1\right)$. $0\in B_{d_{\max}}\left(0,1\right)$ ולכן קיים $0<\varepsilon<2$ כך ש- $B_{d_1}\left(0,\varepsilon\right)\subseteq B_{d_{\max}}\left(0,1\right)$. אבל, לפי הנ"ל, $f_\varepsilon\in B_{d_1}\left(0,\varepsilon\right)$ (כי שימו לב $d_1\left(f_\varepsilon,0\right)=\int_0^1\left|f_\varepsilon(x)\right|dx<\varepsilon$). מצד שני, $f_\varepsilon\notin B_{d_{\max}}\left(0,1\right)$ שכן

$d_{\max}\left(f_{\varepsilon},0\right)=\max\left\{\left|f(x)\right|:x\in\left[0,1\right]\right\}=2$ ולכן ההכלה לא מתקיימת וקיבלנו סתירה להנחה.