# בוחן לינארית למהנדסים תשעד

14.11.2013 י"א כסליו תשע"ד

מתרגלים: גילי גולן, אחיה בר־און
הוראות:

- משך הבחינה: שעה ועשרים דקות
- ענו על כל השאלות
- ללא חומר עזר
- כיתבו את התשובות בטופס הבחינה . המחברת ממדור בחינות משמשת כטיוטא ולא תיבדק!

## בהצלחה!

## חלק א'- שאלות סגורות (שאלות 1-4 שוות 5 נק' ושאלה 5 שווה 25)

1. הקף את התשובה הנכונה ומחק את השגויה
יהא $z \in \mathbb{C}$ אזי מתקיים $|z+iz|^2 = 2|z|^2$
נכון

$$\begin{aligned} |z+iz|^2 &= (z+iz)(\overline{z+iz}) = (z+iz)(\bar{z}-i\bar{z}) \\ &= z\bar{z} + iz\bar{z} - iz\bar{z} + \bar{z}z \\ &= 2z\bar{z} = 2|z|^2 \end{aligned}$$

2. הקף את התשובה הנכונה ומחק את השגויה
תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 = A$ אזי $A = 0_n$ או $A = I_n$
לא נכון
למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. הקף את התשובה הנכונה ומחק את השגויה
יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימות $AB = BA$ אזי $A$ מטריצה אלכסונית או $B$מטריצה אלכסונית
לא נכון
למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. כתוב את מספר הפתרונות האפשריים (∞,1,0) למערכת $Ax = b$ (רק כתיבת כל האפשרויות מזכה בניקוד) אם

(א) $b = \vec{0}$תשובה- 1או $\infty$

(ב) $A \in M_{6\times 3}(\mathbb{C})$ תשובה 0 או 1 או $\infty$

(ג) $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{C})$תשובה 0 או 1 או $\infty$

(ד) $A = vv^t$ כאשר $v \in M_{6\times 1}(\mathbb{C})$ תשובה 0 או $\infty$

## חלק ב־ שאלות פתוחות והוכחות

1. תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. מצא את ההופכית לה (כלומר את $A^{-1}$) והצג את $A$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. (20 נק')

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[1]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{1}{10}R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 \end{array}\right)$$

נגדיר מטריצות אלמנטריות שמתאימות לפעולות $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

ואז מתקיים $E_3E_2E_1A = I$ ומכאן ש

$$A = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ - חשב $A^{10}$ וכתוב תשובה סופית בלבד (ייתכן כי חישוב של $A^2, A^3$ יעזור...) (17 נק')

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

ובאופן כללי

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ולכן עבור $n = 10$ נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$

3. יהיו $\alpha \in \mathbb{C}, , A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ הוכח כי $(\alpha A)B = A(\alpha B)$ (15 נק')

פתרון:

קל לראות כי הגדלים מאפשרים את הכפל. כעת נבדוק רכיבים:

$$\begin{aligned}
[(\alpha A)B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\alpha(A)_{ik}(B)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\alpha(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(\alpha B)_{kj} = [A(\alpha B)]_{ij}
\end{aligned}$$