פתרון לתרגיל מספר 5:

תשובה 1:

$$P(Y=y)=\sum_k P(Y=y,X=k)=\sum_k P(X=k)P(Y=y\mid X=k)$$
$$=\sum_k \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_k\frac{1}{k}$$
$$E(Y)=\sum_k P(X=k)E(Y\mid X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{(k+1)}{2}=\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{n(n+1)+n}{2}=\frac{n+2}{4}$$

תשובה 2:

א. התפלגות X_i – מספר הפריטים מסוג i במדגם:

$$P(X_i=k)=\frac{\binom{D_i}{k}\binom{N-D_i}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ב. פונקצית ההתפלגות המשותפת של (X_1,X_2) הינה

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2)=\frac{\binom{D_1}{x_1}\binom{D_2}{x_2}\binom{N-D_1-D_2}{n-x_1-x_2}}{\binom{N}{n}}$$

ג. התפלגות $X_1|X_2=m$:

$$P(X_1=x_1\mid X_2=m)=\frac{P(X_1=x_1\cap X_2=m)}{P(X_2=m)}=\frac{\dfrac{\binom{D_1}{x_1}\binom{D_2}{m}\binom{N-D_1-D_2}{n-m-x_1}}{\binom{N}{n}}}{\dfrac{\binom{D_2}{m}\binom{N-D_2}{n-m}}{\binom{N}{n}}}$$

המשך תשובה 2 ג:

$$=\frac{\binom{D_1}{x_1}\binom{N-D_1-D_2}{n-m-x_1}}{\binom{N-D_2}{n-m}}$$

אם ידוע שנבחרו m מסוג שני, אזי, לפי מה שניתן לראות בשוויון האחרון, ניתן להצטמצם למרחב מדגם בו בוחרים n-m פריטים מתוך הפריטים שאינם סוג שני.

ד. התפלגות הסכום X_i+X_j:

$$P(X_i+X_j=k)=\frac{\binom{D_i+D_j}{k}\binom{N-D_i-D_j}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ההתפלגות המותנה $X_i|(X_i+X_j=m)$:

$$P(X_i=k\mid X_i+X_j=m)=\frac{P(X_i=k,X_j=m-k)}{P(X_i+X_j=m)}$$

$$=\frac{\dfrac{\binom{D_i}{k}\binom{D_j}{m-k}\binom{N-D_i-D_j}{n-m}}{\binom{N}{n}}}{\dfrac{\binom{D_i+D_j}{m}\binom{N-D_i-D_j}{n-m}}{\binom{N}{n}}}=\frac{\binom{D_i}{k}\binom{D_j}{m-k}}{\binom{D_i+D_j}{m}}$$

<u>תשובה 3:</u>

מספר המכונות X_k שמייצרות בדיוק $k=1,\dots,10$ סוכריות, מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda=2$. המשתנים בלתי תלויים. ואין מכונות שמייצרות יותר מ- 10 סוכריות.

סכום מספר המכונות המייצרות לכל היותר n סוכריות, מתפלג פואסונית אם פרמטר λn עבור $n\le 10$. עבור $n>10$, נספרות רק המכונות המיצרות לכל היותר 10 סוכריות, והללו מתפלגות פואסונית עם פרמטר 10λ.

בתהליך פואסוני אין תלות בין מספר המופעים בתחומים זרים (שאינם נחתכים) . נסמן ב – S_7' את מספר המכונות המיצרות יותר מ- 2 סוכריות ולכל היותר 9 סוכריות , סה"כ 7 ערכים. לכן מספר המכונות מתפלג פואסונית עם פרמטר $7\lambda=14$. עבור כל $k>2$ ההסתברות היא

$$P(S_9 = k \mid S_2 = 2) = \frac{P(S_9 = k, S_2 = 2)}{P(S_2 = 2)} =$$

$$= \frac{P(S_2 = 2)P(S'_7 = k-2)}{P(S_2 = 2)} = P(S'_7 = k-2) = \frac{e^{-14}(14)^{k-2}}{(k-2)!}$$

תשובה 4:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(Y=k) = \sum_n B(n,0.5) \cdot P(X=n)$

עתה, $\binom{n}{k}0.5^n = \binom{n}{k}0.5^k(1-0.5)^{n-k} = B(n,0.5)$ ו- $P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$

לכן נקבל ש $P(Y=k) = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{k}0.5^n \cdot (1-p)^{n-1}p$

תשובה 5:

$X \sim HG(5;20,10)$ זאת אומרת שעבור $0 \le x \le 5$ מתקיים: $P(X=x) = \frac{\binom{20}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{30}{5}}$.

תשובה 6:

א.

$$E[X!] = \sum_x x!\,P_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}.$$

ב.

$$E[(X+1)!] = \sum_x (x+1)!\,P_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda^k$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1} = e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)^2}.$$

בשני המקרים התשובה קיימת עבור $0 \le \lambda < 1$ בלבד.

למי שלא יודע: ∂ הוא סימון של נגזרת.

תשובה 7:

כאשר n גדול ו- p קטן אזי ניתן לקרב את ההתפלגות הבינומית להתפלגות פואסון כאשר $\lambda = np$.

במקרה זה יש לנו 10,000 ניסויים בודדים(n), בכל אחד ההסתברות להצלחה $p = \frac{20}{10000}$ כלומר

$X \sim Bin\left(10000, \frac{20}{10000}\right)$ וכיוון שזה דיי מטורף לחשב את כל העניין פשוט נשתמש בקירוב:

$$\lambda \cong np = 10000 \cdot \frac{20}{10000} = 20$$

נסמן בX את מספר הפורשים משירות בחודש ולכן :

$$P(X = 30) = \frac{e^{-20} 20^{30}}{30!} \approx 0.008$$

תשובה 8:

נסמן ב A את המאורע שהסוחר רוכש חבילה. לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|$ רכיבים פגומים4$) \cdot 0.3 + \mathrm{P}(\mathrm{A}|$ רכיב פגום$) \cdot 0.7 =$

$$= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{3}{10} + \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

כלומר הסוחר אינו רוכש 46% מהחבילות שבדק.

תשובה 9:

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב-X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A \sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$\mathrm{P}(E \mid A) = \mathrm{P}(X_A > 13) = \sum_{t=14}^{\infty} P(X_A = t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{13+k} \left(\frac{1}{20}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{13} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{k} \left(\frac{1}{20}\right)}_{=1} = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{13} = 0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B באשר $X_B \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $\mathrm{P}(E \mid B) = \mathrm{P}(X_B > 13) = \left(1 - \frac{1}{15}\right)^{13} = 0.408$

ואת X_C באשר $X_C \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $\mathrm{P}(E \mid C) = \mathrm{P}(X_C > 13) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{13} = 0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $\mathrm{P}(E) = 0.513 \cdot \frac{1}{2} + 0.408 \cdot \frac{1}{6} + 0.323 \cdot \frac{1}{3} = 0.4322$

המשך תשובה 9:

ב. לפי נוסחת בייס: $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(X_A>13)\cdot\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{0.513\cdot\frac{1}{2}}{0.4322}=0.594$

<u>תשובה 10:</u>

עפ"י הנתון $\lambda=30$ בשעה

א. $X\sim P(\lambda=2.5)$ ב-5 דקות

$$P(X\geq 4)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)=$$
$$=1-\left(\frac{e^{-2.5}2.5^0}{0!}+\frac{e^{-2.5}2.5^1}{1!}+\frac{e^{-2.5}2.5^2}{2!}+\frac{e^{-2.5}2.5^3}{3!}\right)=0.2433$$

ההסתברות שבמשך 5 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.2433

ב. $X\sim P(\lambda=5)$ ב- 10 דקות

$$P(X\geq 4)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)=$$
$$=1-\left(\frac{e^{-5}5^0}{0!}+\frac{e^{-5}5^1}{1!}+\frac{e^{-5}5^2}{2!}+\frac{e^{-5}5^3}{3!}\right)=0.735$$

ההסתברות שבמשך 10 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.735

ג. $X\sim P(\lambda=30)$ בשעה לכן $X\sim P(\lambda=\frac{1}{2})$ בדקה ומכאן ש $X\sim P(\lambda=\frac{N}{2})$ ב- N דקות

לפי נוסחה לתוחלת של התפלגות פואסון: $E(X)=\lambda=\dfrac{N}{2}$

<u>תשובה 11:</u>

$Z\sim P(\lambda+\mu)$.

עבור כל $0\leq k\leq n$:

$$P(X=k\mid Z=n)=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(Z=n)}=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(Z=n)}=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}=\binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

לכן ההתפלגות המותנה של X היא $B\left(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. בשיוויון השני השתמשנו באי תלות בין X ל Y