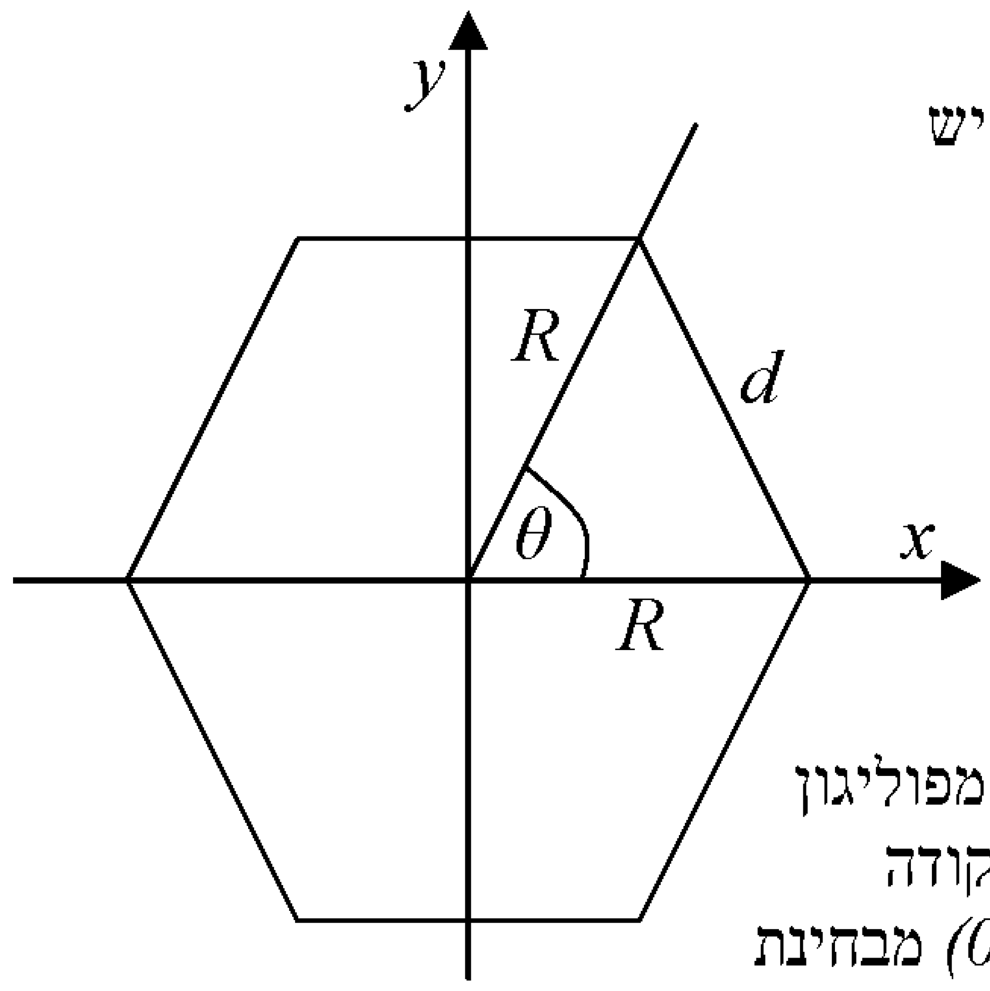
פיסיקה קלאסית 1 - פתרון תרגיל מספר 9



1. ראשית נחשב מהו מיקום הקודקוד שבו אין חרוז. מיקום זה הוא $(R,0,0)$. יש לחשב את R. נשרטט את המערכת ל-$n=6$. אם נוריד אנך לצלע d במשולש עם הזווית θ בשרטוט נקבל

$$d = 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \qquad \theta = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow R = \frac{d}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

לצורך חישוב מרכז המסה ניתן להסתכל על המערכת כש-n אי זוגי כמורכבת מפוליגון שבכל קודקודיו חרוזים שכ"א מהם במסה m, חרוז בעל מסה שלילית m– בנקודה $(R,0,0)$ וכדור במסה M. הכדור שקול לגוף נקודתי במסה M בנקודה $(0,0,h)$ מבחינת חישוב מיקום מרכז המסה. לכן

$$\mathbf{r}_1 = (0,0,0),\ m_1 = nm$$
$$\mathbf{r}_2 = (R,0,0),\ m_2 = -m$$
$$\mathbf{r}_3 = (0,0,h),\ m_3 = M$$
$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^{3} m_i\mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{3} m_i = (-mR,0,Mh)/(nm-m+M) \Rightarrow$$
$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M+(n-1)m}\cdot\left(-\frac{md}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)},0,Mh\right)$$

כש-n זוגי נוספת מסה עם $\mathbf{r}_4 = (-R,0,0),\ m_4 = -m$. מקבלים

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^{4} m_i\mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{4} m_i = \frac{1}{M+(n-2)m}(0,0,Mh)$$

2. נבחר את מרכז הכדור הגדול כראשית $\vec{r}_1 = (0,0,0)$, ומרכז הכדור השני ב־$\vec{r}_2 = (\frac{1}{2}R,0,0)$. מכיוון שהגוף מורכב מכדור אחד (רדיוס R ומסה $m_1 = M$) פחות כדור קטן (רדיוס $\frac{1}{2}R$ ומסה $m_2 = \frac{1}{8}M$ — זיכרו שבנוסחת הנפח מופיע r^3), אזי מרכז המסה הכולל ניתן לרשום

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 - m_2} = \frac{-\frac{1}{8}M\cdot\frac{1}{2}R\hat{x}}{M-\frac{1}{8}M} = -\frac{1}{14}R\hat{x}}.$$

3.

א. מיקום מרכז המסה ניתן ע"י

$$x_{\text{cm}} = \sum_i m_i x_i \Big/ \sum_i m_i = (1\cdot 0 + 3\cdot 8)/(1+3) = 6\text{m}$$

ב. מהירות מרכז המסה היא

$$v_{\text{cm}} = \sum_i m_i v_i \Big/ \sum_i m_i = (1\cdot 8 + 3\cdot 0)/(1+3) = 2\ \text{m/s}$$

ג. האנרגיה הקינטית של מרכז המסה היא

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2}(1+3)2^2 = 8\text{J}$$

ד. מהירות גוף מספר 1 היא

$$v_1' = v_1 - v_{\text{cm}} = 8 - 2 = 6\ \text{m/s}$$

מהירות גוף מספר 2 היא

$$v_2' = v_2 - v_{\text{cm}} = 0 - 2 = -2\ \text{m/s}$$

כבדיקה נחשב את התנע במערכת מרכז המסה ונראה שהוא מתאפס.

$$p_{\text{cm}} = m_1v_1' + m_2v_2' = 1\cdot 6 + 3\cdot(-2) = 0$$

ה. נסמן את מהירויות הבולים לאחר ההתנגשות ב- v_1'', v_2''. יש שימור תנע בהתנגשות. יש שימור אנרגיה בהתנגשות מאחר שהיא התנגשות אלסטית.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1''^2 + \frac{1}{2}m_2v_2''^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1'' + m_2v'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1'' = -4\text{m/s} \\ v_2'' = 4\text{m/s} \end{cases}$$

מהירות מרכז המסה אינה משתנה במהלך כל הניסוי מכיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים בבעיה. לכן $v_{cm} = 2$ m/s גם לאחר ההתנגשות.

ו. מסעיף א' מרכז המסה היה ב-$t=0$ ב-$x=6$m. ההתנגשות ארעה ב-$t=1$. מכיוון ש- $v_{cm} = 2$ m/s, מרכז המסה היה ב-$x=8$m ברגע ההתנגשות. מכיוון ש- $v_{cm} = 2$ m/s,

$$x_{cm}(t=16) = x_{cm}(t=1) + 15 \cdot v_{cm} = 8 + 15 \cdot 2 = 38\text{m}$$

4. כיוון ששני החלקים נוחתים בו זמנית, ומרכז המסה נמצא על הקו המחבר בינהם, אזי מרכז המסה גם "נוחת" באותו רגע. אם נמצא את מקום נחיתת מרכז המסה ואנו יודעי מקום נחית של מסה אח, נוכל למצוא את מיקום השניה.
אם הפגז נורה במהירות התחלתית v_0 ובזווית θ אזי תנועת מרכז המסה מתוארת ע"י הנוסחאות הרגילות של גוף בנפילה חופשית (בהנחה שנורה מהראשית):

$$x = (v_0 \cos\theta)t,$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

מכאן, רגע הנחיתה של מרכז המסה הוא כאשר $y = 0$ (ו־ $t \neq 0$), כלומר

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\theta.$$

נציב במשוואה למקום, ונראה שמרכז המסה "נוחת" ב־

$$x_{CM} = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta.$$

כעת כיוון ששני החלקים נוחתים בו זמנית, אזי, כפי שכבר נאמר, מרכז המסה גם נוחת באותו הרגע. אנו יודעים את הקשר בין מיקום שני החלקים למיקום מרכז המסה ($m = m_1 + m_2$)

$$x_{CM} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1x_1 + m_2x_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{mx_{CM} - m_1x_1}{m_2} \quad (m = m_1 + m_2).}$$

5. כיוון שלאחר ההתנגשות שתי המסות נעות יחד אזי נגדיר/נסמן

$$v' = v_1' = v_2'.$$

כעת *במערכת המעבדה*, התנאי לשימור תנע הוא

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1' = v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(lab system)}.}$$

עבור מערכת מרכז המסה, התנע (הכולל) שם הוא אפס (כי $\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$, אם נכפול ב־ $\sum m_i$ צד ימין הוא סך התנע במערכת, אבל במערכת מרכז המסה $\vec{v}_{CM} = 0$ ולכן סך התנע הוא אפס). לאחר ההתנגשות יש רק גוף אחד ולכן מיקום הגוף הוא מיקום מרכז המסה. כיוון שבמערכת מרכז המסה מהירות מרכז המסה היא אפס אזי

$$\boxed{v_1' = v_2' = 0 \quad \text{(center of mass system)}.}$$

6. ברור כי התותח לא ינוע בכיוון האנכי, לכן נותר לבחון מה קורה בכיוון האופקי. כיוון שאין כח אופקי חיצוני, התנע האופקי חייב להישמר כלומר (v_x מהירות אופקית של התותח)

$$(M + m)\cdot 0 = Mv_x + mv_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = -\frac{m}{M}v_0\cos\theta \quad (v_y = 0).}$$

כלומר התותח ינוע במהירות קבוע בכיוון ההפוך לכיוון הירי.

7. נפתור תחילה במערכת כדוה''א. לשם נוחות נסמן את מהירות הסירות (בסוף) ב־ u_1, u_2, u_3 כאשר סירה 1 היא זו שמאחורי האמצעית, 2 היא האמצעית, ו־ 3 היא הסירה המובילה. כיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים (אופקיים) אזי מתקיים שימור תנע (אופקי). עבור הסירה האמצעית (2) לפני הזריקה המסה של היא $M+2m$ (סירה פלוס המסות) והכל נע במהירות v_0, לאחר הזריקה אנו יודעים כי מהירות המסות היא $v_0 \pm v_1$ (בהתאם לכיוון הזריקה), לכן

$$(M+2m)v_0 = Mu_2 + m(v_0 - v_1) + m(v_0 + v_1) = Mu_2 + 2mv_0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = v_0 \quad \text{(earth system)}}.$$

עבור שתי הסירות הנותרות, לפני ההתנגשות יש לנו מסה באוויר במהירות $v_0 \pm v_1$ (בהתאם לכיוון) וסירה במהירות v_0, ובסוף יש לנו גוף אחד במסה $M+m$: לכן

$$m(v_0 \pm v_1) + Mv_0 = (M+m)u_i \qquad \begin{pmatrix} + & i=3 \\ - & i=1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\boxed{u_1 = v_0 - \frac{m}{M+m}v_1 \quad \text{(earth system)}}.$$

$$\boxed{u_3 = v_0 + \frac{m}{M+m}v_1 \quad \text{(earth system)}}.$$

כעת נפתור במערכת של הסירה האמצעית (לפני הזריקה), כלומר יש לחסר מכל המהירויות שהשתמשנו בהן קודם v_0. עבור הסירה המרכזית (2) שימור התנע יראה כעת

$$(M+2m)\cdot 0 = Mu_2 + m(-v_1) + mv_1 = Mu_2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = 0 \quad \text{(middle boat system)}}.$$

עבור שתי הסירות הנותרות, משוואות שימור התנע נראות הפעם

$$m(\pm v_1) + M\cdot 0 = (M+m)u_i \qquad \begin{pmatrix} + & i=3 \\ - & i=1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\boxed{u_1 = -\frac{m}{M+m}v_1 \quad \text{(middle boat system)}}.$$

$$\boxed{u_3 = \frac{m}{M+m}v_1 \quad \text{(middle boat system)}}.$$

אכן קיבלנו את אותן תוצאות מקודם פחות המהירות v_0 (אם נעבור למערכת כדוה''א נקבל בדיוק אותן תוצאות).

8.

(א) ברגע המפגש, כל המסה מרוכזת בנק' אחת ־ נקודה זו היא נק' מרכז המסה. כיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים על המערכת (סירה קטנה + סירה גדולה) ובהתחלה המערכת במנוחה, אזי מרכז המסה לא נע. כלומר נק' המפגש היא נק' מרכז המסה ב־ $t=0$

$$x_{\text{meet}} = x_{CM} = \frac{mx_m + Mx_M}{M+m}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{\text{meet}} = x_{CM} = \frac{M}{M+m}l}.$$

(ב) עד למפגש, הסירה הקטנה מרגישה כח קבוע (ימינה) T. לכן (בהנחה שהתחילה ממנוחה ב־ $x=0$)

$$x_m = \frac{1}{2}\frac{T}{m}t^2,$$

$$v_m = \frac{T}{m}t.$$

את רגע המפגש t נמצא מהתנאי $x_{\text{meet}} = x_m$ שנותן

$$\frac{M}{M+m}l = \frac{1}{2}\frac{T}{m}t^2$$

$$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2mMl}{(M+m)T}}$$

נציב במשוואה למהירות ונקבל

$$\boxed{.v_m^{\text{meet}}=\sqrt{\frac{2l}{(M+m)}\frac{M}{m}T}}$$

(ג) את מהירות הסירה הגדולה נמצא משימור תנע.

$$(M+m)\cdot 0=Mv_M^{\text{meet}}+mv_m^{\text{meet}}$$

$$\Rightarrow \boxed{.v_M^{\text{meet}}=-\frac{m}{M}v_m^{\text{meet}}=-\sqrt{\frac{2l}{(M+m)}\frac{m}{M}T}}$$