88-113
כ"ג בכסלו תשע"א
30.11.2010

אלגברה לינארית 2

תרגיל 7 - *פתרון*

ע"מ 95 – תרגיל 1.2:

יהי $v\in V$ אזי מתקיים $\langle \vec{0},v\rangle=\langle \vec{0}\cdot v,v\rangle=0\langle v,v\rangle=0$ ומצד שני $\langle v,\vec{0}\rangle=\overline{\langle \vec{0},v\rangle}=\overline{0}=0$.

ע"מ 95 – תרגיל 1.4:

א. $\langle (1\quad 2\quad 3),(-1\quad -2\quad -3)\rangle=1(-1)+2(-2)+3(-3)=-1-4-9=-14$.

ב. $\left\langle \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}\right\rangle=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}^*\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 4i & 7\end{pmatrix}=8$

ג.
$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{a=0}^{b=1}(x^2+2x+3)(x-2)\,dx=\int_0^1(x^3-x-6)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-6x\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6\right)-0=-6\frac{1}{4}$$

ע"מ 96 – תרגיל 1.6:

נשים לב ש- $\langle (x_1\quad x_2),(y_1\quad y_2)\rangle=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+\alpha x_2y_2=(x_1\quad x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & \alpha\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$

ובכתה ראינו שהיא מ"פ אם ורק אם $|A|>0\wedge a_{11},a_{22}>0\wedge A=A^t$.
המטריצה שלנו היא סימטרית ולכן נותר לדרוש כי $(1>0,\alpha>0)\wedge(\alpha-9>0)$, ולפיכך המ"פ הנתונה היא אכן מ"פ כאשר $\alpha>9$.

ע"מ 96 – תרגיל 1.9:

א. נתון $A=(a_{kh})=(\langle e_k,e_h\rangle),k,h=1,...,n$ ויהיו $u=\sum_{j=1}^n\alpha_je_j,v=\sum_{i=1}^n\beta_ie_i$.

אזי: $\langle v,u\rangle=\sum_{i=1}^n\beta_i\sum_{j=1}^n\overline{\alpha_j}<e_i,e_j>$ ומצד שני

$$vAu^*=\left(\sum_{i=1}^n\beta_ie_i\right)(\langle e_k,e_h\rangle)\left(\sum_{j=1}^n\overline{\alpha_j}e^t{}_j\right)=\left(\sum_{i=1}^n\beta_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^n<e_k,e_j>\overline{\alpha_j}\right)=\left(\sum_{i=1}^n\beta_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^n\overline{\alpha_j}<e_k,e_j>\right)$$
$$=\sum_{i=1}^n\beta_i\sum_{j=1}^n\overline{\alpha_j}<e_i,e_j>$$

ב. $a_{kh}=\langle e_k,e_h\rangle=\overline{\langle e_h,e_k\rangle}=\overline{a_{hk}}$ ולכן $A=A^*$.
כיוון שלכל i - $e_i\neq 0$ אז $a_{ii}=\langle e_i,e_i\rangle>0$.

ג. עבור $\alpha=5$ בשאלה 1.6 נקבל כי $\langle v,u\rangle = vAu^t$ אינה מ"פ.

ע"מ 96 – תרגיל 1.13:

מתקיים $\langle v_1+v_2+v_3+v_4, v_1+v_2+v_3+v_4\rangle = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\langle v_i,v_j\rangle = \sum_{i=1}^{4}\langle v_i,v_i\rangle + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\neq i}^{4}\langle v_i,v_j\rangle$,

$$=4\cdot 3+4\cdot 3\cdot(-1)=0$$

ולפי אי-שליליות נסיק כי $v_1+v_2+v_3+v_4=0$.