הרצאה 11

קומבינטוריקה

עקרון הסכום

אם A,B קבוצות סופיות וזרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$.

הוכחה

נתון ש A,B קבוצות סופיות. $A=\{a_1,a_2,...,a_n\},B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ נתון ש A,B קבוצות זרות ולכן $A\cup B=\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_m\}$ כאשר כל האיברים שונים זה מזה. $|A\cup B|=m+n$.

משפט

תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות וזרות אז $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה:

הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח שהטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו ז"א $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

מכיוון ש $A_1,A_2,...,A_n,A_{n+1}$ קבוצות זרות אז גם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i,A_{n+1}$ קבוצות זרות ומהמשפט הקודם נקבל ש

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cup A_{n+1}\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|+|A_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|A_i|.$$

עקרון המכפלה

אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

הוכחה

נתון ש A,B קבוצות סופיות. $A=\{a_1,a_2,...,a_n\},B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ ואז

נתון ש A,B קבוצות סופיות.

$$A\times B=\left\{\overbrace{\overbrace{(a_1,b_1),...,(a_1,b_m)}^{m-times},\overbrace{(a_2,b_1),...,(a_2,b_m)}^{m-times},...,\overbrace{(a_n,b_1),...,(a_n,b_m)}^{m-times}}^{n-times}\right\}$$

ובסה"כ נקבל $m\cdot n$ איברים.

משפט

תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות. אז: $\left|\times_{i=1}^{n}A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה:

הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח שהטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו ז"א $\left|\times_{i=1}^{n}A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$. מהמשפט הקודם נקבל ש

$$\left|\times_{i=1}^{n+1}A_i\right|=\left|\times_{i=1}^{n}A_i\times A_{n+1}\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|\cdot|A_{n+1}|=\prod_{i=1}^{n+1}|A_i|.$$

משפט

לכל שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

הוכחה

נוכיח תחילה שאם C,D קבוצות סופיות כך ש $C\subseteq D$ אז $|D\setminus C|=|D|-|C|$.

מכיוון ש $C,D\setminus C$ קבוצות סופיות וזרות נקבל ש

$|D|-|C|=|D\setminus C| \Leftarrow |D|=|C\cup(D\setminus C)|=|C|+|D\setminus C|$.

מכיוון ש $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$ נקבל ש
$$\begin{aligned}|A\setminus B|&=|A\setminus(A\cap B)|=|A|-|A\cap B|\\ |B\setminus A|&=|B\setminus(A\cap B)|=|B|-|A\cap B|\end{aligned}.$$

(שימו לב שהשוויון הראשון נובע מכיוון ש $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$ ו $B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$.)

מכיוון ש $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ נקבל ש
$$|A\cup B|=|(A\setminus B)|\cup|(B\setminus A)|\cup|(A\cap B)|=|A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|+|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב

משפט

תהיי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $k\in\mathbb{N}$. מספר הסדרות באורך k שניתן לבנות מאיברי A הוא n^k.

הוכחה

אוסף הסדרות באורך k הוא הקבוצה $\overbrace{A\times A\times\ldots A}^{k-times}$ ממשפט קודם נקבל ש

$$\left|\overbrace{A\times A\times\ldots A}^{k-times}\right|=\overbrace{|A|\cdot\ldots\cdot|A|}^{k-times}=|A|^k.$$

דוגמה

מספר הסדרות באורך 8 שניתן לבנות מאיברי הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ הוא 3^8.

הגדרה

תהי A קבוצה, $|A|=n$. סדרה באורך n ללא חזרות של איברי A נקרא תמורה (פרמוטציה) של A.

משפט

מספר התמורות של $\{1,2,\ldots,n\}$ הוא $n!$.

הוכחה

מספר האפשרויות לבחור את האיבר הראשון הוא n, מכיוון שאיבר אחד נבחר כבר עבור האיבר הראשון נקבל שמספר האפשרויות לבחור את האיבר השני בסדרה הוא $n-1$ וכן הלאה...

ואז מספר האפשרויות לקבל סדרה באורך n הוא $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot1=n!$.

דוגמה

התמורות האפשריות עבור הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ הן

$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ קיבלנו $3!$ תמורות.

בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב

משפט

תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $0\le k\le n$ מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A

הוא: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

<u>הוכחה</u>

מספר האפשרויות לבחור את האיבר הראשון הוא n, מכיוון שאיבר אחד נבחר כבר עבור האיבר הראשון נקבל שמספר האפשרויות לבחור את האיבר השני בסדרה הוא $n-1$ וכן הלאה...עד לאיבר במקום ה k שמספר האפשרויות לבחור מספר עבורו הוא $n-k+1$ ולכן סה"כ האפשרויות:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

<u>דוגמה</u>

מספר האפשרויות לבחור מקבוצה עם 5 איברים סדרה באורך 3 שכל איבריה שונים זה מזה הוא $20=\frac{5!}{3!}$.

<u>בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב</u>

<u>משפט</u>

תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $0\le k\le n$. מספר התת-קבוצות של A בגודל k הוא $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>הוכחה</u>

לפי המשפט הקודם מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$.

מספר התמורות של סדרה באורך k הוא $k!$, ולכן לכל בחירה של k איברים יש $k!$ סדרות.

מספר הקבוצות שנקבל הוא $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>דוגמה</u>

מספר התתי קבוצות עם שלושה איברים שיש לקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ הוא $4=\frac{4!}{3!1!}$.

שימו לב שמספר הסדרות באורך 3 הוא

$$\begin{aligned}&(1,2,3),(1,3,2),\ldots.\Rightarrow 3!\\&(1,2,4),(1,4,2),\ldots\Rightarrow 3!\\&(2,3,4),(2,4,3),\ldots\Rightarrow 3!\\&(1,3,4),(1,4,3),\ldots\Rightarrow 3!\end{aligned}.$$

<u>הגדרה</u>

המספר $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, כאשר $0\le k\le n$, נקרא מקדם בינומי ומסומן ע"י $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>טענה</u>

מספר הסדרות הבנויות מ s אפסים ו t אחדים הוא $\binom{s+t}{s}$.

<u>הוכחה</u>

אורך הסדרה הוא $s+t$. בסדרה יש s אפסים. מתוך $s+t$ המקומות בסדרה נבחר s מקומות עבור האפסים. מספר האפשרויות לבחור את s המקומות הוא $\binom{s+t}{s}$, לאחר בחירת s המקומות נשאר t

מקומות עבור האחדים. לכל בחירה של s מקומות עבור האפסים יש אפשרות אחת לשבץ את t האחדים ואז סה"כ מספר האפשרויות הוא $\binom{s+t}{s}$.

בחירה עם חזרות שהסדר חשוב

משפט

תהי A קבוצה, $|A|=n$. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך איברי A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב, הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

הוכחה

נניח ש $A=\{1,2,3,...,n\}$. נסמן ב x_i את מספר הפעמים שמופיעה הספרה i.

המספרים x_i צריכים לקיים את שני התנאים הבאים:

א. $x_i\ge 0$ עבור כל $i\in A$.

ב. $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$.

כלומר שי לחשב את מספר האפשרויות לקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$ כאשר $x_i\ge 0$ עבור כל $i\in A$.

נבנה סדרה באופן הבא: $\overbrace{0...0}^{x_1-times}1\overbrace{0...0}^{x_2-times}1\overbrace{0...0}^{x_3-times}1\overbrace{0...0}^{x_4-times}....1\overbrace{0...0}^{x_n-times}$. עבור כל סדרה נקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$, ולכן מספר הסדרות $\overbrace{0...0}^{x_1-times}1\overbrace{0...0}^{x_2-times}1\overbrace{0...0}^{x_3-times}1\overbrace{0...0}^{x_4-times}....1\overbrace{0...0}^{x_n-times}$ שווה למספר האפשרויות לקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$ שווה למספר הדרכים לבחור k איברים מתוך A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב.

מספר האפסים בסדרה הוא k מספר האחדות הוא $n-1$ ולפי משפט קודם מספר האפשרויות לבנות סדרה באורך $n+k-1$ עם k אפסים ו $n-1$ אחדות הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

משפט (נוסחת הבינום של ניוטון)

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אז, $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

הוכחה

נחשב את מספר הפעמים שמופיע מחובר a^kb^{n-k}. בכל הכפלה בגורם $(a+b)$ יש שתי אפשרויות:

1. לבחור את a. 2. לבחור את b. כדי לקבל את המחובר a^kb^{n-k} יש לבחור בדיוק k פעמים את a מתוך n אפשרויות ז"א $\binom{n}{k}$ פעמים, ולכן סה"כ נקבל ש a^kb^{n-k} מופיע $\binom{n}{k}$ פעמים וזאת לכל $0\le k\le n$. סה"כ נקבל ש $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

משפט

יהי $n\in\mathbb{N}$. אז $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

הוכחה (אלגברית)

נציב $a=b=1$ בבינום של ניוטון ונקבל $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.

הוכחה (קומבינטורית)

ראינו שמספר תתי הקבוצות של קבוצה A עם n איברים הוא 2^n .

מספר תתי הקבוצות ללא איברים הוא $\binom{n}{0}=1$.

מספר תתי הקבוצות עם איבר אחד הוא $\binom{n}{1}$.

ובאופן כללי מספר תתי הקבוצות עם k איברים הוא $\binom{n}{k}$.

בכל תת קבוצה של A יש $0\le k\le n$ איברים ומכיוון שמספר תתי הקבוצות עם k איברים הוא $\binom{n}{k}$ נקבל

שסה"כ מספר תתי הקבוצות הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

משפט

יהי $n\in\mathbb{N}$. אז $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$.

הוכחה אלגברית

נשים לב ש $n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k}$ מכיוון ש

$$n\binom{n-1}{k-1}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}.$$

$$n\cdot 2^{n-1}=n\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}.$$

הוכחה קומבינטורית

נתבונן במספר הדרכים לבחור תתי קבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$ שבהן איבר אחד מסומן.

דרך אחת היא לבחור ב $\binom{n}{k}$ דרכים את כל התתי קבוצות בגודל k . בכל תת קבוצה כזאת אפשר לסמן כל

אחד מ k האיברים ולקבל $k\binom{n}{k}$ קבוצות שונות. נסכם עבור $k=1,2,\ldots,n$ ונקבל $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ תתי

קבוצות.

דרך אחרת היא לבחור ב n דרכים את האיבר המסומן מתוך כל האיברים ב $\{1,2,...,n\}$ כעת בוחרים את יתר האיברים שיצטרפו לאיבר המסומן. מספר התתי קבוצות שאפשר לבחור מתוך $n-1$ האיברים שנותרו הוא 2^{n-1} וסה"כ מספר תתי הקבוצות שאיבר אחד מסומן הוא $n\cdot 2^{n-1}$.

<u>משפט (זהות פסקל)</u>

יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ כאשר $1\le k\le n$. אז $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

<u>הוכחה אלגברית</u>

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\left[(n-k)+k\right]=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>

מספר תתי הקבוצות של הקבוצה $\{1,2,..,n\}$ עם k איברים הוא $\binom{n}{k}$.

מספר תתי הקבוצות עם k איברים שכוללות את המספר n הוא $\binom{n-1}{k-1}$.

מספר תתי הקבוצות עם k איברים שלא כוללים את המספר n הוא $\binom{n-1}{k}$.

ולכן סה"כ מספר תתי הקבוצות הוא $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

<u>משולש פסקל</u>

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$