אלגברה לינארית 1 למדעי המחשב (89112)
בחינת סיום (מועד ב – פתרונות מקוצרים)

מרצים: פרופ' ר. עדין, פרופ' א. רזניקוב.
משך הבחינה: **3** שעות (**לאחר הארכה**).
הנחיות: יש לפתור את כל **3** השאלות. (הציון המקסימאלי הוא 100)
אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.
נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תיבדק והיא רק לטיוטה.

בהצלחה!

1. נדרג, תוך שימוש בתכונות $\mathbb{Z}_5$ (למשל $\bar{7}=\bar{2}$). למען הפשטות נכתוב 2 במקום $\bar{2}$ וכו'.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 3 & a & 1 & | & 0 \\ 4 & 3 & a & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & a+4 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & a+3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

אם המקדמים המובילים $a+3, a+4$ שונים מאפס אז המערכת מדורגת, בלי משתנים חופשיים ובלי שורת סתירה, ולכן יש לה פתרון יחיד (לא התבקשנו למצוא אותו). נותר לבדוק את המקרים בהם אחד המקדמים הנ"ל מתאפס, כלומר $a=1$, $a=2$.

עבור $a=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

אין שורת סתירה, ויש משתנה חופשי אחד (y). אם ניקח $y=t$ נקבל

$z=4$

$x=4-2y-3z=4-2t-2=2+3t$

ולכן הפתרון הכללי הוא $(t\in\mathbb{Z}_5)\quad (x,y,z)=(2+3t,t,4)$.

עבור $a=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

השורה השלישית היא שורת סתירה, ולכן אין למערכת פתרון. לסיכום:

א. עבור $a=2$ אין למערכת פתרון.

ב. עבור $a=1$ יש למערכת 5 פתרונות, והם: $(t\in\mathbb{Z}_5)\quad (x,y,z)=(2+3t,t,4)$.

2.

א. בפולינום זוגי יש רק חזקות זוגיות של x. המרחב $U=\left\{a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6 \mid a_2,a_4,a_6\in\mathbb{R}\right\}$, ולכן $\dim U=3$ עם בסיס סטנדרטי $\left\{x^2,x^4,x^6\right\}$. הקבוצה $S=\left\{x^2+x^4,\ x^4+x^6,\ x^2+x^6\right\}$

כוללת שלושה פולינומים מ- U. לפי משפט "השלישי חינם", כדי להראות שהיא מהווה בסיס ל- U מספיק להוכיח שהיא בת"ל. נרשום את אברי S כצירופים לינאריים של אברי הבסיס הסטנדרטי, נרשום את מקדמי הצירופים כשורות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

לא התקבלו שורות אפסים, ולכן S בת"ל ומהווה בסיס של U.

ב. נרשום

$$p(x)=x^2+4x^4+x^6 \;=b_1(x^2+x^4)+b_2(x^4+x^6)+b_3(x^2+x^6)$$

נשווה מקדמים של חזקות x:

$$x^2:\quad b_1 \qquad +b_3=1$$
$$x^4:\quad b_1+b_2 \qquad =4$$
$$x^6:\qquad b_2+b_3=1$$

למערכת זו פתרון יחיד $(b_1,b_2,b_3)=(2,2,-1)$, ולכן וקטור הקואורדינטות $[p(x)]_S=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$.

ג. $p(x)=1\cdot(x^2+x^4)+2\cdot(x^4+x^6)+1\cdot(x^2+x^6)=2x^2+3x^4+3x^6$

.3

א. $A^{k+1}=A^k\cdot A$, ולכן כל עמודה של A^{k+1} היא צירוף לינארי של עמודות A^k (כאשר המקדמים רשומים בעמודה המתאימה של A). לכן $C(A^{k+1})\subseteq C(A^k)$.

ב. הוכחה בדרך השלילה: לפי סעיף א' ישנה סדרה של הכלות $C(A^1)\supseteq C(A^2)\supseteq C(A^3)\supseteq\ldots$ של תת-מרחבים של $\mathbb{F}^{n\times1}$. אם <u>לא</u> קיים m טבעי כך ש- $C(A^{m+1})=C(A^m)$ אז תמיד $C(A^{m+1})$ הוא תת-מרחב <u>ממש</u> של $C(A^m)$, ולכן ממדיהם שונים זה מזה:

$$n\ge\dim C(A^1)>\dim C(A^2)>\dim C(A^3)>\ldots\ge 0$$

ברור שאין מקום לאינסוף מספרים שלמים שונים בין 0 ל- n, ובכך הוכחה הטענה.

ג. אם $C(B)\subseteq C(A)$ אז כל עמודה של B היא צירוף לינארי של עמודות A. אם נרשום את מקדמי הצירוף כווקטור עמודה, אז המטריצה D המורכבת מווקטורי העמודה הנ"ל מקיימת $B=AD$.

ד. לפי סעיף א', תמיד $C(A^{k+1})\subseteq C(A^k)$. נוכיח הכלה הפוכה $C(A^{k+1})\supseteq C(A^k)$ עבור $k\ge m$. אנו מניחים כי $C(A^{m+1})=C(A^m)$, ובפרט $C(A^m)\subseteq C(A^{m+1})$. לכן, לפי סעיף ג', קיימת מטריצה D המקיימת $A^m=A^{m+1}D$. נכפיל משמאל ב- A^{k-m}: $A^{k-m}A^m=A^{k-m}A^{m+1}D$, כלומר $A^k=A^{k+1}D$. לכן כל עמודה של A^k היא צירוף לינארי של עמודות A^{k+1}, כלומר $C(A^k)\subseteq C(A^{k+1})$ כנדרש, לכל $k\ge m$.