בדידה 1 - תרגיל 6

5 בינואר 2017

1. יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$
   א. האם עבור $A = \{1,2\}$ ו $B = \{1,2,3\}$, $R = A \times B$? הסבירו.
   ב. במידה ואין שיוויון בסעיף א', האם קיימות קבוצות A ו B כך שמתקיים $R = A \times B$? אם כן, כתבו אותן.
   פתרון:

   א.

   לא, כיוון ש: $A \times B \not\ni (3,1) \implies A \not\ni 3$, אבל $(3,1) \in R$, ולכן $R \neq A \times B$.

   ב.

   לא קיימות קבוצות כנ"ל. הסבר: נניח בשלילה כי מתקיים $R = A \times B$ עבור A וB מסויימים. כיוון ש: $(1,1),(2,1),(3,1) \in A \times B$ מתקיים כי $\{1,2,3\} \subseteq A$, בנוסף, $(1,1),(1,2),(1,3) \in A \times B$ ולכן $\{1,2,3\} \subseteq B$. לכן $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \subseteq A \times B$, אבל $(3,2) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$, ו $(3,2) \notin A \times B$ בסתירה!

2. הוכח או הפרך:
   א. $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
   ב. $A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
   פתרון:

   א+ב.

   הוכחה:

   $$(x,y) \in A \times (B \cup C) \iff (x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

   הסבר המעברים לפי סדר: הגדרה, פילוג, הגדרה.

3. הוכח או הפרך:
   א. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
   ב. $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
   פתרון:

   א.

   הוכחה:

   $$(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D) \iff ((x,y) \in A \times B) \vee ((x,y) \in C \times D) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D) \iff ([x \in A \wedge y \in B] \vee x \in C) \wedge ([x \in$$

$A \wedge y \in B] \vee y \in D) \implies (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D) \iff (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$

שימו לב, כי במעבר היחיד שהוא גרירה בכיוון אחד, מהחלק הראשון הורדנו את התנאי ש $y \in B$, ומהחלק השני את התנאי $x \in C$, ולכן זו לא שקילות אלא רק גרירה.

ב.

הפרכה: נפריך ע"י דוגמה נגדית: ניקח: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$.

אזי, הזוג הסדור $(1, 4)$ שייך לצד ימין ולא שייך לצד שמאל ־ כלומר אין הכלה.

4. הוכח כי לכל קבוצה A ואוסף קבוצות $\{B_i\}_{i \in I}$ מתקיים:

$$A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$$

פתרון:

$$(a, b) \in A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) \iff a \in A \wedge b \in \bigcap_{i \in I} B_i \iff a \in A \wedge (\forall i \in I : b \in B_i) \iff$$

$$\iff \forall i \in I : (a \in A \wedge b \in B_i) \iff (a, b) \in \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$$

5. א. הוכח כי $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff [(a = c) \wedge (b = d)]$
הערה: זהו תרגיל המראה כי ניתן להגדיר זוג סדור ע"י קבוצות בלבד: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
ב. מצא דוגמא כך ש: $\{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\}$ אבל **לא מתקיים** $[(a = c) \wedge (b = d)]$.
(כלומר, זו אינה הגדרה טובה לזוג סדור)
פתרון:

א.

ברור כי אם צד שמאל מתקיים אזי גם צד ימין. נוכיח את הגרירה בכיוון השני:

נניח כי מתקיים שהקבוצות שוות: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

אזי, $\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}$. כלומר: $a = c \vee a = c = d$ ובכל אופן מקבלים $a = c$, ולכן $\{a, b\} = \{c, b\}$.

לכן מהשיוון המקורי נקבל: $\{\{c\}, \{c, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ לכן $\{c, b\} = \{c, d\} \vee \{c, b\} = \{c\}$

כלומר: $\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{c\}, \{c\}\} = \{\{c\}\} \vee b = d$.

ומכאן $a = b = c = d \vee b = d$, ובפרט $b = d$.

ב.

ניקח $a = 2, b = \{3\}, c = 3, d = \{2\}$, ואז אכן מתקיים כי $\{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\} = \{\{2\}, \{3\}\}$ אבל $a \neq c$, $b \neq d$.

6. יהיו $A=\{1,2\}=B, C=\{3,4\}$ ונגדיר את היחסים הבאים: $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$ כך:
$R=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}, S=\{(2,3),(1,4)\}$.
א. חשבו את $S\circ R\subseteq A\times C$, S^{-1}, R^{-1}.
ב. חשבו $S^{-1}\circ S$, $R^{-1}\circ R$ וציינו אם התוצאה היא יחס הזהות, יחס הזהות מוכל בה, היא מוכלת ביחס הזהות, או ששום מקרה לא מתקיים.
ג. מצאו קבוצות D_i ויחסים $T_i\subseteq D_i\times D_i$ כך שהתוצאה של $Ti^{-1}\circ T_i$ היא:
*יחס הזהות, *הזהות מוכלת בתוצאה אך לא שווה, *התוצאה מוכלת בזהות ולא שווה, *אין הכלה באף כיוון.
אין צורך לחזור על מקרים שהופיעו בסעיף ב.
פתרון:

א.

$S\circ R=\{(1,4),(1,3),(2,3)\}$, $S^{-1}=\{(3,2),(4,1)\}$, $R^{-1}=\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$.

ב.

$S^{-1}\circ S=\{(2,2),(1,1)\}=I_B$,

$R^{-1}\circ R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\supseteq I_A$.

ג.

יהי D_1 קבוצה כלשהי. $T_1=\emptyset$ היחס הריק, נקבל כי $T_1^{-1}\circ T_1=\emptyset\subseteq I_A$.

תהי $D_2=\{1,2,3\}$. נגדיר $T_2=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$. אזי $T_2^{-1}\circ T_2=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$, $I_{D_2}=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ וברור שאף אחת מקבוצות אלו לא מוכלת בשניה.