אלגברה לינארית למורים- פתרון תרגיל 5

פתרון שאלה 1

מצאו את המטריצות ההופכיות של המטריצות הבאות ובדקו את התשובה שלכם:

1. $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

פתרון

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-2&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&\frac{3}{2}\\0&1&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rho_1:R_2-2R_1\to R_2$$
$$\rho_2:-0.5R_2\to R_2$$
$$\rho_3:R_1-3R_2\to R_1$$
$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-0.5\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$$
$$E_3E_2E_1A=I$$
$$A^{-1}=E_3E_2E_1$$

2. $$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{3}{4}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\to R_1]{R_2+\frac{2}{3}R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 0 & 1/4 & 3/2 & 3/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & -3/4 & -1/2 & -1/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_1\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/4 & 1/2 & 3/4\end{pmatrix}$$

פתרון שאלה 2

$$\rho_1 : R_1 + 2R_2 \to R_1$$

$$\rho_2 : R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\rho_3 : 0.5R_3 \to R_3$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$