בעיות קיצון עם אילוצים

משפט (על כופלי לגרנז') (תנאי הכרחיים)

תהי $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ ממשית ממח' C^2 (Ω סביבה של $\left(x^0,y^0\right)$), $G:\Omega\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ ממשית ממחלקה C^1.

$G(x,y)=0$ $(*)$ s משוואות ממשיות שהן האילוצים.

נניח ש$\left(x^0,y^0\right)$ היא נק' קיצון של F, תחת האילוץ $(*)$,

[כלומר: $\left.\frac{\partial\left(G_1,...G_s\right)}{\partial\left(y_1,...y_s\right)}\right|_{\left(x^0,y^0\right)}$ $G(x,y)=0$ שקול מקומית סביב $\left(x^0,y^0\right)$ למשוואה המפורשת $y=\varphi(x)$, לפי משפ' הפונקציות הסתומות, $F(x,\varphi(x))$ מינימלי או מקסימלי במק' x^0 מקומית בסביבה U של x^0.]

<u>אזי</u> קיים וקטור <u>קבוע</u> $c=\left(c_1,...c_s\right)$ כך ש$\left.\nabla\left(F-cG\right)\right|_{\left(x^0,y^0\right)}=0$

$$\boxed{\nabla\left.\left(F-\sum_{j=1}^{s}c_jG_j\right)\right|_{\left(x^0,y^0\right)}=0}$$

יחד עם $G\left(x^0,y^0\right)$ יש כאן $k+2s$ משוואות ב$k+2s$ נעלמים: $\begin{matrix}x_1^0,...x_k^0\\ y_1^0,...y_s^0\\ c_1,...c_s\end{matrix}$. הערכים $c_1,...c_j$ נקראים "כופלי לגרנז'"

דוגמה

מצא את התא התלת מימדי בעל הנפח המקסימלי כאשר שטח מעטפתו נתונה (A=)

$$F(x,y,z)=xyz$$

$$\underbrace{xy+xz+yz-\frac{A}{2}}_{G(x,y,z)}=0$$

$$k=2,s=1$$

יש כופל לגרנז' אחד: $\nabla(F-cG)=0$ בנק' קיצון. התנאי על היעקוביאן הוא $\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|\neq 0$ $x+y=$

$$F-cG\equiv xyz-c\left(xy+xz+yz-\frac{A}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(...) = yz - c(y+z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(...) = xz - c(x+2) = 0 \\ xy - c(x+y) = 0 \\ xy + xz + yz = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$xyz - cx(y+z) = 0$$

$$xyz - cy(x+z) = 0$$

$$c(y-x)z = 0$$

$c \neq 0$ (אחרת סותר משוואה ראשונה ולכן

$$y = x$$

באותה דרך עם שתי המשוואות האחרונות נקבל $x = y = z$. ז"א התא הוא קוביה, ומתוך האילוץ מקבלים בדיוק את הצלעות:

$$3x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{A}{6}} = y = z}$$

הוכחת המשפט

הבעיה היא למצוא נק' קיצון של הפונקציה $F(x, \varphi(x))$.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i} F(x, \varphi(x))\right|_{x^0} = 0 \quad i = 1, ...k$$

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{(x^0,y^0)} + \sum_{j=0}^{s} \left.\frac{\partial F}{\partial y_j}\right|_{(x^0 y^0)} \left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right|_{x^0} = 0 \\ \left.\frac{\partial G_i}{\partial x_i}\right|_{(x^0,y^0)} + \sum_{j=0}^{s} \left.\frac{\partial G_i}{\partial y_j}\right|_{(x^0,y^0)} \left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right|_{x^0} = 0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial(G_1, ...G_s)}{\partial(y_1, ...y_s)}\right| \neq 0$$

$G(x,\varphi(x))=0 \Leftarrow$ בסביבה של x^0, $A \doteqdot \left.\frac{\partial(G_1,...G_s)}{\partial(y_1,...y_s)}\right|_{(x^0,y^0)}$ הפיכה.

לכל i נתון, פותרים עבור הנעלמים $\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}\end{pmatrix}$ ומציבים במשוואות עם F. מקבלים בדיוק את המשוואות שבטענה(חשבון...)

תכונה של מטריצת היעקוביאן ביחס להרכבת העתקות

$$U^{\subset\mathbb{R}^k} \xrightarrow{F} V^{\subset\mathbb{R}^l} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^m$$

$$x \to y = F(x) \to z = G(F(x))$$

$$(G\circ F)(x) \doteqdot G(F(x))$$

$$\left(\frac{\partial(z_1,...z_m)}{\partial(x_1,...x_k)}\right) = \left(\frac{\partial(z_1,...z_m)}{\partial(y_1,...y_l)}\right)\left(\frac{\partial(y_1,...y_l)}{\partial(x_1,...x_k)}\right)$$

במיוחד כאשר $k=l=m$, המטריצות ריבועיות, ולכן הדטרמיננטות שלהן מוגדרות(הן היעקוביאנים המתאימים), וכידוע, דטר' של מכפלת מצטירות שווה למכפלת הדטר' שלהן, ועל כן מקבלים

$$\frac{\partial(z_1,...z_k)}{\partial(x_1,...x_k)} = \frac{\partial(z_1,...z_k)}{\partial(y_1,...y_k)}\frac{\partial(y_1,...y_k)}{\partial(x_1,...x_k)}$$

("כאילו" צימצום)

במיוחד אם $\left.\frac{\partial(y_1,...y_k)}{\partial(x_1,...x_k)}\right|_{x^0} \neq 0$, משפט ההעתקה ההפוכה(בהנחותיו) אומר שקי-ימת ההעתקה ההפוכה(באופן מקומי) $x=G(y)$ של $y=F(x)$

דוגמה

$$\left\{\begin{array}{c} x = F_1(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = F_2(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = F_3(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta \end{array}\right.$$

אלו הן קואורדינטות כדוריות במרחב.

$$(r,\varphi,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\subset\mathbb{R}^3\to(x,y,z)\,\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0\\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta\end{pmatrix}$$

היעקוביאן

נפתח את הדטר' לפי העמוד האחרון:

$$r^2\left[\begin{array}{c}\cos\theta\left\{-\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta-\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right\}_1\\ -\sin\theta\left\{\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta\right\}_2\end{array}\right]=...$$

$$\{\}_1=-\sin\theta\cos\theta\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)$$

$$\{\}_2=\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)$$

$$...=r^2\left[\cos\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\right)-\sin^3\theta\right]=$$

$$=\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r^2\sin v$$