תרגיל בית 5 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. יהי R חוג, ויהי $P \lhd R$ אידאל. נזכר ש-P הוא ראשוני אם לכל $A, B \lhd R$ המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$. הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

א. P הוא ראשוני.

ב. לכל $a, b \in R$ אם מכפלת האידאלים הראשיים $\langle a\rangle \langle b\rangle \subseteq P$, אז $a \in P$ או $b \in P$.

ג. לכל $A, B \leq_l R$ אידאלים שמאליים המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$.

ד. לכל $A, B \leq_r R$ אידאלים ימניים המקיימים $AB \subseteq P$, אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$.

שאלה 2. יהי R תחום שלמות.

א. הוכיחו כי $R \times \{0\} \lhd R \times R$ הוא אידאל ראשוני.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ מצאו חוג שיש לו בדיוק n אידאלים ראשוניים נאותים. רמז: הסעיף הקודם עם תחום שלמות מיוחד.

שאלה 3. יהי $f\colon R \to S$ הומומורפיזם של חוגים חילופיים, ויהי $I \lhd S$ אידאל ראשוני. הוכיחו כי $f^{-1}(I) \lhd R$ הוא אידאל ראשוני.
הסיקו את המקרה הפרטי שבו R הוא תת־חוג של S ו-f היא השיכון הטבעי: אם $I \lhd S$ אידאל ראשוני, אז $I \cap R$ הוא אידאל ראשוני של R.

שאלה 4. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שחיתוך שני אידאלים מקסימליים שונים של R אינו אידאל ראשוני.

שאלה 5. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שכל אידאל ראשוני מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים. הסיקו מכך שהקבוצה של כל האיברים הנילפוטנטיים מוכלת בחיתוך של כל האידאלים הראשוניים. (למעשה יש שיוויון!)

שאלה 6. נסמן את חבורת ההפיכים של מונואיד M בסימון $U(M)$.

א. תהי $\{M_i\}_{i\in I}$ משפחה של מונואידים. הוכיחו

$$U\left(\prod_i M_i\right) = \prod_i U(M_i)$$

או במילים: חבורת ההפיכים של המכפלה הישרה של $\{M_i\}_{i\in I}$ היא המכפלה הישרה של חבורות ההפיכים שלהם.

ב. תהא $\{m_1, \ldots, m_k\}$ קבוצת מספרים טבעיים הזרים בזוגות, ונסמן את מכפלתם ב-n. נתבונן בחבורת אוילר U_n. הסיקו מהסעיף הקודם שישנו איזומורפיזם של חבורות

$$U_n \cong U_{m_1} \times \cdots \times U_{m_k}$$

רמז: U_n היא חבורת ההפיכים של מונואיד מוכר, ושימוש במשפט השאריות הסיני.

ג. הסיקו מהסעיף הקודם את הנוסחה לפונקציית אוילר שפגשנו בקורס בתורת החבורות

$$\varphi(n) = p^{s_1-1}(p_1-1)\dots p^{s_t-1}(p_t-1)$$

כאשר $n = p_1^{s_1} \cdots p_t^{s_t}$ הוא הפירוק לראשוניים של n. אפשר להניח את נכונות הנוסחה לחזקות של ראשוניים, כלומר $\varphi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$.

בהצלחה!