# תרגיל בית 6 בתורת החבורות
# 88-218 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1** (חימום)**.** תהי קבוצה $A = \{a, b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על $A$. מי מהן טרנזיטיבית?

**שאלה 2** (חזרה)**.** חשבו כמה מחזורים מאורך $2 \leq r \leq n$ יש בחבורה $S_n$.

**שאלה 3.** תהי $\pi = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10) \in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.

**שאלה 4.** תהי $G$ חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e \neq x \in G$ מתקיים $x^{-1} \notin \operatorname{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של $x$ לא שייך למחלקת הצמידות של $x$).

**שאלה 5.** תהי $G$ חבורה ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את המְרַכֵּז של $S$ ב-$G$ להיות

$$C_G(S) = \{g \in G \,|\, \forall s \in S, gs = sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s \in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

א. הוכיחו שאם $S \subseteq T \subseteq G$ תת־קבוצות, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

ב. הוכיחו

$$C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s) = \bigcap_{s \in \langle S \rangle} C_G(s) = C_G(\langle S \rangle)$$

והסיקו כי $C_G(S) \leq G$.

ג. תנו דוגמה לחבורה $G$ ותת־קבוצה $S$ כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $S \subsetneq C_G(S) \subsetneq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

ד. תנו דוגמה לחבורה $G$ ותת־קבוצה $S$ כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $C_G(S) \subsetneq S \subsetneq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

**שאלה 6.** נאמר שפעולה של חבורה $G$ על קבוצה $X$, כך ש-$|X| > 2$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.
הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

א. הוכיחו שאם $G$ פועלת 2-טרנזיטיבית על $X$ אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי $G$ פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם $G$ פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

ג. הוכיחו כי $S_4$ פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

ד. יהי $F$ שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית עליה.

**שאלה 7.** תזכורת: דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ הוא שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של $V$.

א. הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$. בנוסף הראו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

ב. מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על $i$.

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

**שאלה 8.** כהמשך לתוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, הוסיפו לה פונקציה המחשבת את גודל מחלקת הצמידות של תמורה ב-$S_n$, ופונקציה המחשבת את סדר המְרַכֵּז שלה.

**שאלה 9.** יהי $\Psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

א. הוכיחו שאם $\Psi$ מקיים את שני התנאים:

- לכל $A, B \in \mathcal{L}$, אם $A \leq B$ אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$.
- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi^3 = \Psi$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

ב. הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!