אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 5

27 בנובמבר 2019

הגדרה: פונקציה פשוטה היא פונקציה מדידה המקבלת מספר סופי של ערכים. לכל פונקציה פשוטה φ יש הצגה קנונית $\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbb{1}_{E_k}$, כאשר $E_k=\{x\,|\,\varphi(x)=a_k\}$ קבוצות מדידות זרות.

הגדרה: אינטגרל לבג של פונקציה פשוטה $\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbb{1}_{E_k}$ הוא $\int_X\varphi d\mu=\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(E_k)$.

הגדרה: ראינו שאפשר לקרב כל פונקציה מדידה על ידי סדרה של פונקציות פשוטות. לכן נגדיר את אינטגרל לבג של פונקציה אי־שלילית f להיות

$$\int_X f_n d\mu=\sup_{0\le\varphi\le f}\int_X\varphi d\mu$$

טענה (הלמה של פאטו): תהיינה $f_n:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות. אז

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty}f_n d\mu\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

דוגמה: במרחב המידה $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ נגדיר סדרת פונקציות פשוטות לפי $f_n(x)=\frac{1}{n}$. אז $\underline{\lim}f_n=0$, אבל לכל n מתקיים $\int_{\mathbb{R}}f_n dm=\infty$. לכן אי־השוויון של למת פאטו הוא חזק.

דוגמה: נתבונן בסדרת הפונקציות $f_n(x)=\mathbb{1}_{[n,n+1]}$. אז

$$\underline{\lim}\int\mathbb{1}_{[n,n+1]}dm=m([n,n+1])=1\ge\int\underline{\lim}\mathbb{1}_{[n,n+1]}dm=\int 0dm=0$$

דוגמה: נתבונן בסדרת הפונקציות $f_n(x)=\mathbb{1}_{[n,\infty)}$. אז

$$\underline{\lim}\int\mathbb{1}_{[n,\infty)}dm=m([n,\infty))=\infty\ge\int\underline{\lim}\mathbb{1}_{[n,\infty)}dm=\int 0dm=0$$

דוגמה: נתבונן בסדרת הפונקציות $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. אז

$$\underline{\lim}\int n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}dm = nm\left(\left[0,\frac{1}{n}\right]\right) = 1 \geq \int \underline{\lim}\left(n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\right)dm = \int 0dm = 0$$

דוגמה: נגדיר $f_n(x) = 1 + sign\left(\sin\left(2^n * 2\pi x\right)\right)$. אז

$$\int f_n dm = \int \left(0\mathbb{1}_{\{\sin(2^n*2\pi x)<0\}} + 2\mathbb{1}_{\{\sin(2^n*2\pi x)>0\}} + 1\mathbb{1}_{\{\sin(2^n*2\pi x)=0\}}\right)dm$$

$$= \int \left(2\mathbb{1}_{\{\sin(2^n*2\pi x)>0\}} + 1\mathbb{1}_{\{\sin(2^n*2\pi x)=0\}}\right)dm \geq 2m\left(\left\{\sin\left(2^n * 2\pi x\right) > 0\right\}\right) = 2*\infty = \infty$$

נרצה למצוא את הצד השני של אי־השוויון בלמת פאטו. יהי n טבעי. נחקור את הסימן של $\sin\left(2^n * 2\pi x\right)$. כדי למצוא גבול תחתון יעניין אותנו מתי הפונקציה תהיה שלילית. נקבל כי הפונקציה שלילית עבור x אם ורק אם $2\pi k + \pi < 2^n * 2\pi x < 2\pi k + 2\pi$ עבור k שלם. כלומר, $\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{k+1}{2^n}$. עבור N גדול מספיק, כל x שהוא לא חזקה של $\frac{1}{2}$ יקיים את התנאי הזה עבור k שלם כלשהו לכל $n > N$. (כדאי לצייר כדי לראות). לכן

$$\underline{\lim}\left(1 + sign\left(\sin\left(2^n * 2\pi x\right)\right)\right) = \begin{cases} 1 & x = \frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

אבל יש רק מספר בן־מניה של x־ים עבורם נקבל שהגבול התחתון הוא 1, ולכן $\int \underline{\lim} f_n = 0$.

תרגיל (למת פאטו ההפוכה): הוכיחו כי אם $f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות המוגדרות על מרחב המידה (X,S,μ), וקיימת פונקציה אינטגרבילית g המקיימת $|f_n| < g$ לכל n, אז

$$\int_X \overline{\lim} f_n d\mu \geq \overline{\lim}\int_X f_n d\mu$$

הוכחה: נגדיר $h_n = g - f_n$. לפי ההנחה, אכן $h_n \geq 0$. בנוסף $\int_X h_n d\mu = \int_X g - f_n d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu$, ואכן האינטגרל מוגדר היטב (עדיין לא הוכחנו תכונה זו בהרצאה). כעת מהלמה של פאטו, $\int_X \underline{\lim} h_n d\mu \leq \underline{\lim}\int_X h_n d\mu$. מצד אחד

$$\int_X \underline{\lim} h_n d\mu = \int_X g d\mu + \int_X \underline{\lim}\left(-f_n\right)d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \overline{\lim} f_n d\mu$$

מצד שני $\underline{\lim}\int_X h_n d\mu = \int_X g d\mu - \overline{\lim}\int_X f_n d\mu$. נחסיר את $\int_X g d\mu$ משני האגפים ונקבל $\int_X \overline{\lim} f_n d\mu \geq \overline{\lim}\int_X f_n d\mu$.

תרגיל: תהי f_n סדרת פונקציות אי־שליליות ואינטגרביליות, מונוטונית יורדת, המתכנסת ל־f. הראו כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

הוכחה: מהלמה של פאטו נובע כי $\int_X fd\mu = \int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$. מצד שני, לפי למת פאטו ההפוכה מתקיים $\int_X fd\mu = \int_X \overline{\lim} f_n d\mu \geq \overline{\lim} \int_X f_n d\mu$ סך הכל קיבלנו כי $\overline{\lim} \int_X f_n d\mu \leq \int_X fd\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$, ומכאן שקיים גבול והוא $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X fd\mu$.

משפט (משפט ההתכנסות המונוטונית): תהיינה $f_n : X \to [0, \infty]$ פונקציות מדידות, ונניח שלכל x, $f_n(x)$ היא סדרה מונוטונית עולה. אז סדרת הפונקציות מתכנסת לפונקציה מדידה ומתקיים

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

תרגיל: תהי f פונקציה מדידה אי־שלילית המקיימת $\int_X f_n d\mu = 0$. הוכיחו כי $\{x \mid f(x) > 0\}$ היא קבוצה ממידה אפס.

הוכחה: נסמן $E = \{x \mid f(x) > 0\}$ ונגדיר $f_n(x) = n * f(x)$. קיבלנו סדרה מונוטונית עולה של פונקציות מדידות אי־שליליות, לכן נוכל להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית. נקבל $\int_X \lim_{n\to\infty} nfd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X nfd\mu = \lim_{n\to\infty} n \int_X fd\mu = 0$. נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$. אז $0 = \int_E \lim_{n\to\infty} nfd\mu \leq \int_X \lim_{n\to\infty} nfd\mu$ כי $E \subseteq X$, אבל לכל $x \in E$ מתקיים $f(x) > 0$ ולכן לכל $x \in E$ נקבל $nf(x) \to \infty$. כלומר $\int_E \lim_{n\to\infty} nfd\mu = \infty * \mu(E) = \infty$ בסתירה.