תזכורת: למת הניפוח ־ הוכחת אי רגולריות

- נניח בשלילה L רגולרית.
- יהי n מלמת הניפוח.
- נבחר $z=?$, $z\in L$, $n\le|z|$
- יהי פירוק $z=uvw$, $|uv|\le n$, $|v|\ge1$
- נבחר $i=?$, ונראה $z'=uv^iw\notin L$ ־ סתירה.

תרגיל

הוכח או הפרך L רגולרית.

$$L=\left\{a^{n!}\middle|n\ge1\right\}$$

פתרון

נוכיח ע"י למת הניפוח שהשפה לא רגולרית.
נניח בשלילה L רגולרית. נבחר $z=a^{n!}$ ($z\in L$, $n\le|z|$)
יהי פירוק $w=a^{n!-s\cdot t}$, $v=a^t$, $u=a^s$, $s+t\le n$, $1\le t$.
נבחר $i=2$.
נראה $z'=uv^iw\notin L$. $z'=uv^2w=uvvw=a^{n!+t}$.
כדי להראות סתירה יש להראות שלא קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $n!+t=k!$.
יודעים ש $1\le t\le n$.

$$n!\le n!+1\le n!+t\le n!+n\overset{\substack{\text{assuming}\\ n\ge2}}{\le}n!+n\cdot n!=n!\left(n+1\right)=\left(n+1\right)!$$

כלומר קיבלנו

$$n!<n!+t<(n+1)!$$

ולכן לא קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $n!+t=k!$, לכן $z'\notin L$.
הראנו סתירה לכל $n\ge2$. אם נדרש להראות לכל n, נתבונן אם כך במקרה בו $n<2$, ($n=1$). נבחר $z=a^{3!}=a^6$, $z\in L$, $|z|=6\ge n$.
יהי פירוק $s+t\le n<2$, $t\ge1$. כלומר $\begin{cases}u=a^5\\ v=a^t\end{cases}$ $\begin{matrix}u=\varepsilon\\ v=a\\ w=a^5\end{matrix}$

נבחר $i=0$. נתבונן ב

$$z=uv^0w=aw=\varepsilon\cdot a^5=a^t\notin L$$

לסיכום, הראנו לכל n סתירה ולכן L לא רגולרית.

סגירויות

הומומורפיזם

יהיו Σ, Δ א"ב. נגדיר הומומורפיזם h כפונקציה המעבירה אותיות מΣ למילים בΔ:

$$h : \Sigma \to \Delta^*$$

דוגמה

$$h : \{0,1\} \to \{a,b,c\}$$

$$h(0) = abb \qquad h(1) = c$$

ואז

$$h(00) = abbabb$$

$$h(\{0,1\}) = \{abb, c\}$$

משפט

אם L רגולרית, אז $h(L)$ רגולרית.

תרגיל

הוכח כי אם L רגולרית אז $\hat{L}$ רגולרית, כאשר

- L מוגדרת מעל Σ
- $\hat{L}$ מוגדרת מעל $\Delta = \{1\}$

$$L = \left\{ 1^{3 \cdot |w|} \middle| w \in L \right\}$$

פתרון

לכאורה, נראה שצריך לזכור את האורכים. אבל לא באמת, שכן גם האוטומט של L לא צריך לזכור אורכים.

נגדיר הומומורפיזם

$$h:\Sigma\to\{1\}^*$$

$$h(\sigma)=111$$

מתקיים $h(L)=\hat{L}$(למה?), ומסגירות השפות הרגולריות להומומורפיזם נקבל $\hat{L}$ רגולארית.

הומומורפיזם הפוך

בהינתן $h:\Sigma\to\Delta^*$, אם L רגולרית מעל Δ אז $h^{-1}(L)$ רגולרית מעל Σ(h^{-1} אינה בהכרח פונקציה)

דוגמה

$$h:\{0,1\}\to\{a\}^*$$

$$h(0)=a^3 \qquad h(1)=a^2$$

$$h^{-1}\left(\left\{a^6\right\}\right)=\{00,111\}$$

תרגיל

הוכח או הפרך ע"י סגירויות בלבד:

$$L=\left\{a^{3n}b^{5n}\middle|n\geq 0\right\}$$

לא רגולרית.

פתרון

נגדיר $h:\{0,1\}\to\{a,b\}^*$ הומומורפיזם

$$h(0)=a^3 \qquad h(1)=b^5$$

$h^{-1}(L)=\{0^n1^n|n\geq 0\}$. נשתמש בסגירות להומומורפיזם הפוך, והנ"ל שפה לא רגולרית - סתירה.

הערה

נגדיר שתי שפות:

$$L=\left\{b^{5n}\right\} \qquad L'=\left\{a^{5n}\right\}$$

שתיהן שפות רגולריות. נשרשר אותן:

$$L'\cdot L=\left\{a^{5n}b^{5n}\right\}$$

לכאורה גם שפה רגולרית! אבל הטעות היא שזה לא אותו n, ולכן בעצם צריך לכתוב $L'\cdot L=\left\{a^{5n}b^{5m}\right\}$.

עוד הערה

$$L'=\left\{a^{3n}b^{6n}\right\}$$

$$h\left(a\right)=00 \qquad h\left(b\right)=1$$

נקבל $h\left(L\right)=0^{6n}1^{6n}$, אז זו שפה לא רגולרית, הרי ניתן לכתוב $0^{6n}1^{6n}=0^{i}1^{i}$.

טעות! זה לא הומומורפיזם, כי זה עובר ממילים לאותיות.

הצבה

$$f:\Sigma\to P\left(\Delta^{*}\right)$$

קבוצת מילים, כלומר <u>שפה</u>.

אם L רגולרית אז $f\left(L\right)$ רגולרית.

הערה

נגדיר

$$f\left(0\right)=a^{n}b^{n}$$

$$f\left(\left\{0\right\}\right)=\left\{a^{n}b^{n}\right\}$$

$\left\{0\right\}$ רגולארי $\Leftarrow$ $a^{n}b^{n}$ רגולארי - סתירה!

לכן f צריכה להיות הצבה רגולרית, כלומר לכל σ, $f\left(\sigma\right)$ שפה רגולרית.

שאלה

נגדיר חלוקה מימין

$$L_1/L_2=\left\{x|\exists_{y\in L_2}x\cdot y\in L_1\right\}$$

הוכח שאם L_1,L_2 רגולריות אז L_1/L_2 רגולארית. יש להשתמש בסגירויות בלבד.

פתרון

הרעיון הוא להשתמש בסגירויות

$$L_1 \cap \Sigma^* \cdot L_2$$

אבל צריך להוכיח שזה שווה לL_1/L_2
נגדיר הומומורפיזם:

$$h : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma^*$$

$$\Sigma' = \{\sigma' | \sigma \in \Sigma\}$$

$$h(\sigma) = \sigma \qquad h(\sigma') = \sigma$$

נתבונן ב$h^{-1}(L)$. זה כל המילים מL עם סימון $'$ בכל הקומבינציות האפשריות.
נגדיר הומומורפיזם h

$$g : \Sigma \to \Sigma'$$

$$g(\sigma) = \sigma'$$

$$\Sigma^* \cdot g(L_2)$$

כל המילים עם תחילית לא מסומנת וסייפא מסומנת שהיא מילה מL_2.
נגדיר הומומורפיזם k:

$$k : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma^*$$

$$k(\sigma) = \sigma \qquad k(\sigma') = \Sigma$$

ולסיכום נקבל

$$L_1/L_2 = k\left(h^{-1}(L_1) \cap \Sigma^* g(L_2)\right)$$

ומסגירות השפות הרגולריות להומומורפיזם, הומומורפיזם הפוך, חיתוך ושרשור נקבל L_1/L_2 רגולרי.

במילים
1. סימנו את כל האותיות במילים מL_2 עם $'$.
2. מצאנו את כל השילובים המתאימים.
3. הורדנו את הסימונים.

משפט נרוד

תזכורת: יחס שקילות הוא יחס שמקיים רפלקסיביות(aRa), סימטריות($aRb \Leftrightarrow bRa$) וטרנזיטיביות($\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix} \Rightarrow aRc$)

יהי יחס R_L(אינווריאנטי מימין) מעל Σ^*. יהיו $x, y \in \Sigma^*$.
אם $\forall_{z\in\Sigma^*} (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ אזי xR_Ly.
כלומר x, y בלתי מובחנות מימין.

מחלקת שקילות

תת קבוצה המכילה את כל האיברים הנמצאים ביחס זה עם זה

$$[a] = \{x|xRa\}$$

משפט נרוד

- אם מספר מחלקות השקילות של R_L סופי(שווה n) אז L רגולרית, ומספר המצבים באוטומט הדטרמיניסטי המינימלי הוא n.
- אם מספר מחלקות השקילות אינסופי, אז L לא רגולרית.

שאלה

מהן מחלקות השקילות ביחס R_L עבור

$$L = \{a^nb^n|n \geq 0\}$$

תשובה

נסתכל על הקבוצה האינסופית $W_i = a^i$ $(i > 0)$. עבור כל זוג מילים $w_i \neq w_j$ קיים מפריד $z = b^i$ כך ש

$$w_iz = a^ib^i \in L$$

$$w_jz = a^jb^i \notin L$$

מכאן שיש אינסוף מחלקות שקילות, וע"פ נרוד L לא רגולרית.

דוגמה

מהן מחלקות השקילות של R_L כאשר

$$L = \{w||w| \mod 2 = 0\}$$

תשובה

$$[\varepsilon] = \text{even length words}$$

$$[a] = \text{odd length words}$$