פתרון תרגיל בית 4

5 בדצמבר 2012

3.3.31 חשב את המכפלות הבאות:

1. $(1\,2\,4\,7)\,(3\,2\,4)\,(6\,1\,3\,4)$.
2. $(1\,2)\,(1\,3)\cdots(1\,n)$.

פתרון

1. $(1\,4\,6\,2\,7)\,(3)\,(5)$.
2. $(1\,n\,n-1\,n-2\,\cdots\,3\,2)$. $\square$

3.3.32 כתוב בצורה המלאה וכמכפלה של מחזורים זרים את התמורות הבאות:

1. $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&4&3&1&5\end{pmatrix}$.
2. $\beta=(1\,4\,3)\,(2\,5)\,(6)$.
3. $\gamma=(1\,2)\,(1\,4)\,(2\,3)\,(4\,2)\,(1\,4)$.
4. $\delta=\alpha\beta\gamma$.

פתרון

1. $\alpha=(1\,2\,6\,5)\,(3\,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&4&3&1&5\end{pmatrix}$.
2. $\beta=(1\,4\,3)\,(2\,5)\,(6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&1&3&2&6\end{pmatrix}$.
3. $\gamma=(1\,3)\,(2)\,(4)\,(5)\,(6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&4&5&6\end{pmatrix}$.
4. $\delta=(1\,2)\,(3)\,(4)\,(5\,6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&4&6&5\end{pmatrix}$. $\square$

3.3.33 הראו שאם τ_1,τ_2 מחזורים זרים, $\tau_1(\alpha)\neq\alpha$ ו־$\tau_2(\beta)\neq\beta$, אז $\tau_2\circ\tau_1\circ(\alpha\beta)$ הוא מחזור באורך $o(\tau_1)+o(\tau_2)$.

פתרון נסמן את המחזורים $\tau_1 = (x_1 x_2 \cdots x_n \alpha)$ ו־$\tau_2 = (y_1 y_2 \cdots y_m \beta)$. נראה מה קורה לאיברים ב־$\sigma = \tau_2 \circ \tau_1 \circ (\alpha \beta)$. יהי z איבר. אם $z \notin Supp\,(\tau_1) \cap Supp\,(\tau_2)$, אז ברור ש־$z$ נשאר במקומו. אם z הוא בתומך של τ_1 אבל אינו α אז הוא זז איבר אחד קדימה ב־τ_1, ושאר התמורות המרכיבות את σ אינן מזיזות אותו ממקומו. בדומה עבור z בתומך של τ_2 שאיננו β, הוא איננו מושפע משתי התמורות הראשונות בהרכבה, והוא זז אחד קדימה על ידי τ_2. α עובר ל־y_1 ו־β עובר ל־x_1. בסך הכל קיבלנו כי

$$\sigma = (x_1 x_2 \cdots x_n \alpha y_1 y_2 \cdots y_m \beta)$$

ניתן לראות כי זהו מחזור ואורכו הוא כמבוקש, $o\,(\tau_1) + o\,(\tau_2)$. □

4.1.1 נניח ש־$H_1, H_2 \leq G$ תת־חבורות. הוכיחו שהחיתוך $H_1 \cap H_2$ גם הוא תת חבורה.

פתרון איבר היחידה נמצא כמובן בשתי החבורות ולכן גם בחיתוך שלהן. נותר רק להראות כי החיתוך סגור לכפל ולהפיך. נעבוד לפי הקריטריון המקוצר. יהיו $g, h \in H_1 \cap H_2$ נתונים. נביט ב־gh^{-1}. זו הרכבה של כפל והפיכה בחבורה H_1, ולכן זהו איבר ב־H_1. באופן דומה, גם H_2 היא חבורה, ולכן $gh^{-1} \in H_2$. ביחד אנו מקבלים שאכן $gh^{-1} \in H_1 \cap H_2$. □

4.1.2 נניח ש־$H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות של חבורה G. הוכיחו שהחיתוך $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ גם הוא תת־חבורה.

פתרון כפי שפתרנו את תרגיל 4.1.1. נשתמש בקריטריון המקוצר. איבר היחידה נמצא בכל חבורה, ולכן החיתוך איננו ריק. יהיו $g, h \in H_1 \cap \cdots \cap H_n$ נתונים. בפרט, $g, h \in H_i$, שהיא חבורה. לפיכך גם $gh^{-1} \in H_i$. הטענה נכונה עבור כל $1 \leq i \leq n$. ביחד אנו מקבלים $gh^{-1} \in H_1 \cap \cdots \cap H_n$. □

4.1.9 תהי $H \leq G$ תת־חבורה, ותהי $X \subseteq G$ תת־קבוצה כלשהי. אז $X \subseteq H$ אם ורק אם $\langle X \rangle \subseteq H$.

פתרון ($\Longleftarrow$) נניח כי $X \subseteq H$. אזי על פי הגדרת החבורה הנוצרת, $\langle X \rangle$ היא חיתוך של כל התת־חבורות המכילות את X, בפרט H נכללת בחיתוך הזה. לפיכך $\langle X \rangle \subseteq H$.
($\Longrightarrow$) נניח כי $\langle X \rangle \subseteq H$. אזי על פי הגדרת החבורה הנוצרת, $\langle X \rangle$ היא חיתוך של כל החבורות המכילות את X. ממילא $X \subseteq \langle X \rangle$, ולכן $X \subseteq H$. □

4.1.12 מצא את אברי תת־החבורה של S_6 הנוצרת על ידי $(1\,4\,5)\,(2\,6\,3)$ ו־$(1\,5)\,(3\,6)$.

פתרון נסמן את היוצרים שלנו $\sigma = (1\,4\,5)\,(2\,6\,3)$ ו־$\tau = (1\,5)\,(3\,6)$. אזי האיברים שלנו הם

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle &= \left\{ id, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2 \right\} \\ &= \begin{Bmatrix} id & (1\,4\,5)\,(2\,6\,3) & (1\,5\,4)\,(2\,3\,6) \\ (1\,5)\,(3\,6) & (1\,4)\,(2\,3) & (4\,5)\,(2\,6) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

מכיוון ש־σ הוא מסדר 3 ו־τ הוא מסדר 2, ברור כי רשמנו לעיל את כל הביטויים מהצורה $\tau^i \sigma^j$ עבור חזקות שלמות. לסגירות החבורה נותר להראות כי גם $\sigma\tau$ נמצא כאן, ואז נראה כי היא סגורה גם לכפל ב־σ משמאל וב־τ מימין. ואכן $\sigma\tau = \tau\sigma^2 = (4\,5)\,(2\,6)$. לפיכך ברור כי הקבוצה סגורה לכפל. מכיוון שכל האיברים הם מסדר סופי, הקבוצה סגורה גם להיפוך. אם כן זו החבורה הנוצרת המבוקשת.

בשולי הדברים נעיר כי ניתן לזהות את איברי החבורה על פי היחסים שהם מקיימים בינם לבין עצמם. בחבורה שלנו מתקיימים היחסים הבאים: $\sigma^3 = \tau^2 = id$ ו־ $\sigma\tau = \tau\sigma^2$. ניתן לראות כי אלו היחסים שמקיימים היוצרים של S_3, ולכן החבורה שלנו היא לכל היותר מסדר 6. מנגד, מכיוון שהסדר של היוצרים חייב לחלק את הסדר של החבורה, היא מסדר 6 לכל היותר, ולכן היא חבורה מסדר 6 והקבוצה שמצאנו לעיל מתארת אותה. למעשה, אנו מביטים כאן על התמורות של הקבוצה בת 3 האיברים $\{(1,6),(4,2),(5,3)\}$, ובמובן הזה זו באמת S_3. $\square$

4.1.14 זהה את החבורות הנוצרות על ידי קבוצות המטריצות הבאות. בפרט, מה סדר החבורה בכל מקרה?

1. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ו־ $E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
2. D, E^2.
3. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו־ $G = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$. [1]

פתרון

1. נראה אלו יחסים מתקיימים: E היא מטריצה סקלרית, ולכן היא מתחלפת עם כל המטריצות האחרות. בפרט, E מתחלפת עם D. אם כן, אנו מקבלים כאן שכל היוצרים של החבורה מתחלפים זה עם זה, וממילא החבורה אבלית, מפני שמתקיים לכל i,j השוויון $E^iD^j = D^jE^i$. בדיקה תראה כי D ו־E שתיהן מסדר 4, וכן מתקיים $D^2 = E^2$. לכן החבורה היא
$$\langle D,E\rangle = \left\{1, D, D^2, D^3, E, DE, D^2E, D^3E\right\}$$
ובעזרת כל היחסים שמצאנו בין האיברים השונים, ברור שקבוצה זו אכן סגורה לכפל ולהיפוך. אם כן, הסדר שלה הוא 8.
נעיר כי אם נביט בחבורה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, נמצא כי האיברים $(1,0)$ ו־$(1,1)$ יוצרים אותה. איברים אלו מקיימים בדיוק את אותם היחסים שמקיימים D ו־E, ולכן החבורות איזומורפיות זו לזו.
2. אמרנו כבר ש־$E^2 = D^2$, ולכן אנו מביטים על החבורה הנוצרת על ידי D, D^2. אבל D^2 נוצר על ידי D, ולכן זו החבורה הנוצרת על ידי D. אם כן זוהי החבורה הציקלית מסדר 4, $\mathbb{Z}_4$.
3. נראה כאן אילו יחסים מתקיימים. מחד, קל לראות כי $F^2 = G^3 = 1$. חשבון יחסית קל מגלה שמתקיים $GF = FG^2$. אלו בדיוק היחסים שמגדירים את S_3, כפי שהזכרנו כבר בשאלה 4.1.12. מנגד, בחבורה יש איברים מסדרים 2 ו־3, ולכן היא מסדר המתחלק ב־6. אי לכך, המבנה של החבורה הוא בדיוק אותו מבנה שראינו שם, והחבורה היא מסדר 6. $\square$

4.1.15 נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, השורש השלישי של 1.

זהה את החבורה הנוצרת על ידי A, B ועל ידי A, C.

פתרון נתחיל בחבורה הנוצרת על ידי A, B. A מסדר 3. החבורה הנוצרת על ידי A מאופיינת בכך שבכל מטריצה יש שלושה איברים שאינם מתאפסים, וערכיהם 1. האפשרויות הן: האלכסון ראשי, האלכסון מעל הראשי עם הפינה השמאלית תחתונה, האלכסון מתחת הראשי עם הפינה הימנית־עליונה. ניתן לשים לב כי B איננה משפיעה כלל על האפסים בכל מכפלה, ולכן על בחירת האלכסון.

B נותנת לנו את האפשרות לבחור איזה איבר יופיע בסימן שלילי. על ידי מיקום שונה של B במכפלה ניתן לגרום לכל אחד מהאיברים שאינם 0 להיות -1. בסך הכל יש 3 אפשרויות לאלכסון. בכל אלכסון יש 3 איברים, שבעזרת B כל אחד מהם יכול להיות 1 או -1, $2^3 = 8$ אפשרויות שונות למיקום המספרים השליליים באלכסון. בסך הכל מצאנו $3 \cdot 8 = 24$ איברים שונים בחבורה. בסך הכל החבורה היא

$$\langle A, B\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \{\pm 1\} \right\}$$

כעת נעבור למקרה השני, A, C. $C = BAABA$, ולכן אנחנו בתוך $\langle A, B\rangle$. כאן ניתן לראות כי כל היוצרים הם מדטרמיננטה 1, ולכן צריך לזרוק מהחבורה את כל האיברים מדטרמיננטה -1. נותרנו עם 12 איברים. ניתן להראות כי כל האיברים שנותרו נוצרים על ידי A, C. כך מצאנו כי זו חבורה מסדר 12.

נסמן $D = AACA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ניתן לראות כי A, C, D מקיימים ביניהם את היחסים הבאים:

- $A^3 = C^2 = D^2 = 1$
- $CA = AD$
- $DA = ACD$

ביחד אלו היחסים שיוצרים את A_4, כפי שמוסבר בשיעור התרגיל. באופן דומה ניתן לשכן את החבורה הראשונה ב־S_6 על ידי הזיהוי

$$\begin{aligned} A &\mapsto (1\,2\,3) \\ B &\mapsto (1\,2)\,(3\,4)\,(5\,6) \end{aligned}$$

ואז יתקיים $C \mapsto (1\,4)\,(2\,3)$. $\square$

4.3.15 מצא את הסדר של המחזור $(r_1 \cdots r_t)$, ואת הסדר של $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_u$ כאשר כל ה־τ_i הם מחזורים זרים מאורך n_i.

פתרון נסמן את המחזור הנתון לנו על ידי τ. הסדר של תמורה הוא החזקה המינימלית שתיתן לנו זהות. זהות שולחת כל איבר לעצמו, אנו נתחיל ונחפש מתי $\tau^k(r_1) = r_1$, ואחר כך נביט על שאר האיברים. ובכן, τ הוא מחזור, ולכן הוא מעביר את r_1 ל־r_{1+k} כעבור k מחזורים ($k < t$). כאשר $k = t$, מתקיים $\tau^t(r_1) = \tau \circ \tau^{t-1}(r_1) = \tau(r_t) = r_1$, ולפיכך r_1 חוזר לעצמו לראשונה כעבור t חזרות. באופן דומה, עבור שאר האיברים בתומך, כעבור t צעדים הם חוזרים למקומם. שאר האיברים, שאינם נמצאים בתומך

אינם זזים ממקומם כלל. בסך הכל, כעבור t צעדים כל האיברים חוזרים למקומם לראשונה, ומתקיים $\tau^t = id$. אם כן, הסדר של המחזור הוא t.
נעבור כעת למקרה הכללי יותר. נביט שוב באופן אקראי באחד האיברים r_1 שנמצא בתומך של אחד המחזורים, נניח ב־τ_i. אזי הוא חוזר לעצמו לראשונה כעבור n_i צעדים. ברור שהוא חוזר לעצמו גם בהמשך, כעבור $m \cdot n_i$ צעדים, בעבור m שלם. לכן ברור שקבוצת הפתרונות של המשוואה $\sigma^k(r_1) = r_1$ היא $n_i\mathbb{Z}$. במקרה שלנו, אנו צריכים לחפש את הסדר של σ כך שזה יתקיים לכל איבר בכל τ_i, ולפיכך הסדר מתחלק בכל ה־n_i הנתונים לנו. בסך הכל מצאנו עד כה שפתרון של $\sigma^k = id$ מתחלק בכל ה־n_i. לפיכך הוא מתחלק ב־$\operatorname{lcm}(n_1, \ldots, n_u)$. אנו נראה שהסדר הוא באמת $k = \operatorname{lcm}(n_1, \ldots, n_u)$. יהי x איבר כלשהו. אנו רוצים להראות ש־$\sigma^k(x) = x$ ואז $\sigma^k = id$. אם x איננו נמצא בתומך של אף אחד מהמחזורים τ_i, אז הוא איננו זז ממקומו אף פעם, ובפרט כעבור k צעדים. אחרת, ומכיוון שהמחזורים זרים, x נמצא בתומך של מחזור יחיד, נניח τ_i. אזי מהגדרת lcm, קיים איזה m כך ש־$m \cdot n_i = k$. לכן $\sigma^k(x) = \sigma^{m \cdot n_i}(x) = id^m(x) = id(x) = x$. אם כן, לכל x מתקיים $\sigma^k(x) = x$, ולפיכך $\sigma^k = id$. כבר הראנו שכל פתרון מתחלק ב־k, ולכן הפתרון המינימלי הוא k.
לסיכום, הסדר של σ הוא $k = \operatorname{lcm}(n_1, \ldots, n_u)$. $\square$

4.3.16 הוכיחו כי אין ב־S_4 איבר מסדר 6.

פתרון איבר ב־S_n ניתן לתיאור באופן יחיד (עד כדי סדר) על ידי פירוק למחזורים זרים. כפי שראינו בתרגיל 4.3.15, הפירוק הזה קובע באופן יחיד את הסדר של כל איבר. לפיכך, אנו מחפשים פתרון למשוואות

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i &= 4 \\ \operatorname{lcm}(x_1, \ldots, x_m) &= 6 \end{aligned}$$

ואז x_i יהיו אורכי המחזורים הזרים. במקרה של S_4 האפשרויות לפתרון של המשוואה הראשונה הן:

1. 4 מחזורים מאורך 1. $1+1+1+1$.
2. 2 מחזורים מאורך 1 ומחזור יחיד מאורך 2. $1+1+2$.
3. מחזור יחיד מאורך 1 ומחזור יחיד מאורך 3. $3+1$.
4. 2 מחזורים מאורך 2. $2+2$.
5. מחזור יחיד מאורך 4. 4.

ניתן לראות כי הסדר של כל טיפוס איבר מהטיפוסים האלו הוא $1, 2, 3, 4$. אף אחד מהטיפוסים איננו מסדר 6.
דרך נוספת (מילולית יותר): 6 מתפרק לראשוניים $6 = 2 \cdot 3$. לפיכך הפתרון של $\operatorname{lcm}(x_1, \ldots, x_m) = 6$ הוא אחד משני אלו: $x_1 = 3, x_2 = 2$, כל שאר האורכים מתחלקים ב־6. הפתרון השני הוא $x_1 = 6$, וכל שאר האורכים מתחלקים ב־6. בכל מקרה, הסכום הכולל של אורכי המחזורים עולה על 4, ולכן אין פתרון למערכת המשוואות. $\square$

4.3.17 מצאו ב־S_7 איברים מסדרים $5, 6, 7, 10$. למה אין איבר מסדר 8?

פתרון נביט באיברים הבאים:

$$\begin{aligned} o\left((1\,2\,3\,4\,5)\right) &= 5 \\ o\left((1\,2\,3\,4\,5\,6)\right) &= 6 \\ o\left((1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)\right) &= 7 \\ o\left((1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7)\right) &= 10 \end{aligned}$$

לעומתם, ב־S_7 אין איבר מסדר 8. נראה זאת על בסיס תרגיל **4.3.15**, כפי שעשינו בתרגיל **4.3.16**. למערכת המשוואות המתאימה, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 7, \mathrm{lcm}\left(x_1, \ldots, x_m\right) =$ 8 אין פתרון. כעת נאמר זאת בפירוט: איבר מסדר 8 הוא איבר שמתפרק למחזורים זרים שכפולתם המשותפת היא 8. מכיוון ש־8 הוא חזקה של מספר ראשוני, הוא כפולה משותפת של עצמו עם מי ממחלקיו. בנוסחא נרשום כי הפתרונות למשוואה השניה הם $\{x_1 = 8, \forall i > 1, x_i \mid 8\}$. לכן חייב להופיע מחזור מאורך 8, וב־S_7 אין מחזור כזה.
$\square$