<u>פתרון תרגיל 5</u>

<u>שאלה 1</u>

א. הטענה נכונה. הוכחה: H_1 נורמלית לכן $H_1H_2 = H_2H_1$. לפי משפט שהוכח בהרצאה (בהינתן ת"ח H_1, H_2, הקבוצה H_1H_2 היא ת"ח אמ"ם $H_1H_2 = H_2H_1$) נקבל כי H_1H_2 אכן תת-חבורה.

ב. H_1H_2 לא בהכרח נורמלית. אפשר לקחת דוגמא טריוואלית: אם $(G,\cdot,e)$ היא חבורה לא אבלית שיש לה תת-חבורה לא נורמלית (למשל $G = S_n$ עבור $n > 2$), נקח $H_1 = \{e\}$ (ברור כי H_1 נורמלית) ו-H_2 תת-חבורה לא-נורמלית כלשהי של G (למשל $H_2 =< (12) >$). אז $H_1H_2 = H_2$ היא תת-חבורה לא נורמלית.
(אם רוצים דוגמא לא טריוואלית, אפשר למשל להסתכל על D_9 עם התת"ח הנורמלית $H_1 = \{id, \sigma^3, \sigma^6\}$ והתת"ח $H_2 = \{id, \tau\}$. מכפלתם היא $\{id, \sigma^3, \sigma^6, \tau, \tau\sigma^3, \tau\sigma^6\}$ והיא לא נורמלית. העובדות כי H_1 נורמלית ו-H_1H_2 לא נורמלית נובעות ישירות מהאפיון של תת-החבורות הנורמליות של D_n עבור n אי-זוגי: הן בדיוק התת"ח הציקליות הנוצרות ע"י σ^m עבור $m < n$: $H_1 =< \sigma^3 >$ ולכן נורמלית, וברור ש-H_1H_2 לא נוצרת ע"י שום חזקה של σ, לכן לא נורמלית.)

ג. הטענה נכונה. הוכחה: נתון $H_1 \lhd G, H_2 \lhd G$, צריך למצוא כי $H_1H_2 \lhd G$. שים לב כי לפי סעיף א' $H_1H_2 \le G$ ולכן נשאר רק להראות ש-H_1H_2 נורמלית. יהיו $h \in H_1H_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in H_1H_2$. כיוון ש-$h \in H_1H_2$ קיימים $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ כך ש-$h = h_1h_2$. כיוון ש-H_1 נורמלית נקבל $gh_1g^{-1} \in H_1$ וכיוון ש-H_2 נורמלית נקבל $gh_2g^{-1} \in H_2$. לכן
$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} = h \in H_1H_2$ כפי שרצינו להראות.

ד. הטענה נכונה. הוכחה: נתון $H_1 \lhd G, H_2 \lhd G$, צריך למצוא כי $H_1 \cap H_2 \lhd G$. אנחנו כבר יודעים שחיתוך של ת"ח הוא ת"ח, כלומר $H_1 \cap H_2 \le G$ ונשאר רק למצוא כי $H_1 \cap H_2$ נורמלית. יהיו $h \in H_1 \cap H_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$. $h \in H_1 \cap H_2$ לכן $h \in H_1$ וכיוון ש-H_1 נורמלית נקבל $ghg^{-1} \in H_1$. באותו האופן מהנורמליות של H_2 נקבל $ghg^{-1} \in H_2$. לכן סה"כ $ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$ כדרוש.

<u>שאלה 2</u>

א. תהי G חבורה, $H \le G$, $g \in G$. נגדיר העתקה $\varphi : H \to gHg^{-1}$ ע"י $\varphi(h) = ghg^{-1}$. נראה כי φ הומומורפיזם: בהינתן $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $\varphi(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$ כדרוש. נראה כי φ חח"ע: אם $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ אז $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$. בחבורה ניתן לצמצם לכן נקבל $h_1 = h_2$ כדרוש. נראה כי φ על: יהי $y \in gHg^{-1}$ כלומר יש $h \in H$ כך ש-$y = ghg^{-1}$. מתקיים $\varphi(h) = ghg^{-1} = y$ כדרוש.

ב. תהי G חבורה עם ת"ח H יחידה מסדר n. לכל $g \in G$ מתקיים כי gHg^{-1} איזומורפית ל-H (לפי סעיף א'), בפרט יש להן אותו מספר איברים. כלומר ל-gHg^{-1} יש סדר n ולכן $gHg^{-1} = H$ לכל $g \in G$, מש"ל.

שאלה 3

א. יהי $g \in G_1$. נניח כי הסדר של g הוא n, בפרט מתקיים $g^n = e$. φ הומומורפיזם לכן $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e$. קיבלנו $\varphi(g)^n = e$ וכפי שראינו בכיתה זה אומר ש-n הוא כפולה של הסדר של $\varphi(g)$, שזה מה שרצינו להוכיח.

ב. יהי $g_2 \in G_2$ איבר מסדר n. φ על לכן יש $g_1 \in G_1$ כך ש-$\varphi(g_1) = g_2$. φ הומומורפיזם לכן לפי סעיף א' הסדר של g_1 הוא כפולה של n, נניח $|g_1| = nm$ עבור $m \in \mathbb{N}$. נקבל כי $(g_1{}^m)^n = g_1{}^{mn} = e$, כלומר יש איבר $g = g_1{}^m$ שמקיים $g^n = e$ וכדי להראות שהסדר שלו הוא אכן n נשאר להראות שה-n הוא מינימאלי. נניח בשלילה כי יש $t < n$ כך ש-$g^t = e$ כלומר $(g_1{}^m)^t = e$ לכן $g_1{}^{mt} = e$ בסתירה למינימאליות של n.

ג. יהי h_1 יוצר של H_1, כלומר לכל $h \in H_1$ יש $n \in \mathbb{Z}$ כך ש-$h = h_1^n$. כיוון ש-φ הומומורפיזם התמונה של φ היא $\{\varphi(h) : h \in H_1\} = \{\varphi(h_1^n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi(h_1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$. לכן אם $\varphi(h_1)$ לא היה יוצר את H_2 התמונה היתה מוכלת ממש ב-H_2 בסתירה לכך ש-φ על.

שאלה 4

ראשית, כדי להשלים את לוח הכפל: נקח דוגמא. נתחיל מ-$ijk = -1$ ונכפול משמאל ב-i. נקבל $i^2 jk = -i$ וכיוון ש-$i^2 = -1$ קיבלנו $-jk = -i$ כלומר $jk = i$. באופן דומה אפשר למצוא את שאר המכפלות. לוח הכפל המתקבל הוא:

·	1	i	j	k	−1	−i	−j	−k
1	1	i	j	k	−1	−i	−j	−k
i	i	−1	k	−j	−i	1	−k	j
j	j	−k	−1	i	−j	k	1	−i
k	k	j	−i	−1	−k	−j	i	1
−1	−1	−i	−j	−k	1	i	j	k
−i	−i	1	−k	j	i	−1	k	−j
−j	−j	k	1	−i	j	−k	−1	i
−k	−k	−j	i	1	k	j	−i	−1

כעת לפתרון השאלה עצמה:

א+ב: ב-Q_8 יש 3 תת-חבורות מסדר 4: $\{\pm1, \pm i\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי i, $\{\pm1, \pm j\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי j, $\{\pm1, \pm k\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי k.

האינדקס של כל אחת מהן הוא: $[Q_8 : \mathrm{H}] = \frac{8}{4} = 2$ ולכן כל אחת מהן היא נורמלית (לפי הטענה שכל ת"ח בעלת אינדקס 2 היא נורמלית.)

יש ת"ח אחת מסדר 2: {1,-1}. ת"ח זו היא גם המרכז של חבורת הקואטרניונים כיוון שמתקיים רק עבור 1,-1:
$-1 \cdot x = x \cdot (-1) = -x$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ לכל $x \in Q_8$, ולכן נורמלית.

כמובן שיש גם את שתי תת-החבורות הטריוויאלית שהן תמיד נורמליות.

למה אין עוד תת-חבורות ב-Q_8?

לפי משפט לגרנז' סדר כל ת"ח מחלק את סדר החבורה, וכיוון ש-$|Q_8| = 8$ כל ת"ח של חבורת הקואטרניונים היא מסדר 1,2 או 4. מסדר 1 ברור כי {1} הת"ח היחידה (זה נכון לכל חבורה). מסדר 2- בת"ח מסדר 2 האיבר האחד הוא הניטרלי - 1 ולכן השני חייב להיות איבר מסדר 2 ו-(-1) הוא האיבר היחיד מסדר 2 בחבורת הקואטרניונים לכן אין עוד ת"ח מסדר 2 ב-Q_8. מסדר 4 - ניקח למשל את i (ובאופן סימטרי זה יהיה נכון גם אם נקח את j או k). אז ת"ח זו חייבת להכיל את כל חזקות i כדי שתהיה סגירות לפעולה, לכן ת"ח זו מכילה את $\{\pm1, \pm i\}$ זאת אומרת שהת"ח היא לפחות מסדר 4, אבל לפי לגרנז' אין ת"ח ממש גדולה יותר שמכילה אותה.

ג: לפי הסעיף הקודם קיבלנו כי ב- Q_8 יש 3 תת-חבורות מסדר 4, ולעומת זאת ב- D_4 רק $\{id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$ היא ת"ח מסדר 4. לכן Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4.

<u>שאלה 5</u>

הבדיקה שמיפויים אלו הינם הומומורפיזמים היא פשוטה.
(א) לא חח"ע, כן על. (ב) כן חח"ע, לא על. (ג) לא חח"ע, לא על.

<u>שאלה 6</u>

א. נסמן $H=\{\sigma\in S_5:\sigma(2)=2\}$. נבדוק סגירות: יהיו $a,b\in H$, צ"ל $ab\in H$. אך $a(2)=2$, $b(2)=2$, לכן $ab(2)=a(b(2))=a(2)=2$, ולכן $ab\in H$. הופכי: ברור שאם $a(2)=2$ אז ההעתקה ההפוכה a^{-1} גם מקיימת $a^{-1}(2)=2$, לכן לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.

ב. H לא תת-חבורה נורמלית של S_5. נבחר למשל $h=(34)\in H$, ו- $g=(23)$. נבדוק למה שווה ghg^{-1}: $(23)(34)(23)=(24)$. קיבלנו שהתוצאה היא (24) וזה לא איבר ב- H. כלומר מצאנו זוג איברים $g\in G,h\in H$ עבורם $ghg^{-1}\notin H$ ולכן H לא נורמלית.

<u>שאלה 7</u>

(ראשית, $G=\bigcup_n G_n$ חבורה: נבדוק למשל סגירות. יהיו $a,b\in G$. $a\in G$ לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a\in G_n$. כמו כן $b\in G$ לכן קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $b\in G_m$. עבור $s=\max(n,m)$ נקבל כי $a,b\in G_s$, וכיוון ש- G_s חבורה מתקיימת בה סגירות כלומר $ab\in G_s$ לכן $ab\in G$. באופן דומה מוכיחים את שאר התכונות של חבורה.)

כעת לשאלה עצמה: צריך להראות כי G פשוטה כלומר שאין לה ת"ח נורמליות לא טריוואליות. תהי $N\lhd G$, נראה כי N טריוואלית. ראשית, מתקיים $N\cap G_n\lhd G_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (לפי כך שאם G חבורה, H ת"ח של G, ו- N ת"ח נורמלית של G, אז $N\cap H$ ת"ח נורמלית של H). כיוון ש- G_n פשוטות, עבור כל n האופציות היחידות הן $N\cap G_n=\{e\}$ או $N\cap G_n=G_n$.
נחלק ל-2 מקרים:
1) קיים $i\in\mathbb{N}$ עבורו $N\cap G_i=G_i$. נבחר את i להיות המינימאלי המקיים זאת. כלומר לכל $k<i$ מתקיים $N\cap G_i=\{e\}$, ולכל $k\geq i$ מתקיים $N\leq G_k$ (הסבר: $N\cap G_i=G_i$ לכן $N\leq G_i$. כמו כן $G_i\leq G_k$ לכל $k>i$ ולכן $N\leq G_k$). אז קיבלנו:

$$N=N\cap G=N\cap(\bigcup_n G_n)=\bigcup_n(N\cap G_n)=(\bigcup_{k=1}^{i-1}N\cap G_k)\cup(\bigcup_{k=i}^{\infty}N\cap G_k)=\{e\}\cup\bigcup_{k=i}^{\infty}G_k=\bigcup_{k=i}^{\infty}G_k=G$$

כלומר $N=G$ היא טריוואלית.
2) לא קיים $i\in\mathbb{N}$ עבורו $N\cap G_i=G_i$, כלומר $N\cap G_i=\{e\}$ לכל $i\in\mathbb{N}$. אבל אז $N=N\cap G=N\cap(\bigcup_n G_n)=\bigcup_n(N\cap G_n)=\bigcup_n\{e\}=\{e\}$ כלומר $N=\{e\}$ היא טריוואלית.