תרגיל מספר 5 מבנים אלגבריים

להגשה עד 4.12.2014

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים
   (א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$
   (ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$
   (ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n} = G$
   (ד) תהא G חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$
   (ה) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$

2. תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים.

3. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$

הבהרות לסימונים:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים
3. $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים
4. $\mathbb{C} = \left\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \, i^2 = -1\right\}$ היא קבוצת המספרים המרוכבים. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מספרים).
5. $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots n-1\}$ היא הקבוצה של כל השאריות האפשריות בחלוקה ב n. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מודולו n).

6. $\mathbb{F}^{n\times n}$ היא קבוצת כל המטריצות הריבועית $n\times n$ עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור חיבור מטריצות). להגדרת שדה אפשר להסתכל בוויקיפדיה.
7. עבור $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נהוג לסמן $|A|$ כדטרמיננטה של A. להגדרת דטרמיננטה אפשר להתסכל בוויקיפדיה.
8. S_3 היא חבורת התמורות מהקבוצה $\{1,2,3\}$ לעצמה.
9. עבור חבורה G. הפירוש של הסימון $H\leq G$ הוא ש H היא תת חבורה של G.
10. הסימון $H_1\subseteq H_2$ פירוש שהקבוצה H_1מוכלת בקבוצה H_2. כלומר שאם איבר ששיך ל H_1 אז בהכרח הוא שייך ל H_2.
11. הסימון $\Longleftrightarrow$ היא קשר לוגי של "אם ורק אם" כלומר שאם צד ימין מתקיים אז צד שמאל מתקיים. בנוסף, אם צד שמאל מתקיים אז צד ימין מתקיים.
12. $G\backslash H=\{x\in G\mid x\notin H\}$ פירושו ההפרש בין G ל H.
13. $H_1\cup H_2=\{x\mid x\in H_1\vee x\in H_2\}$ פירושו האיחוד בין הקבוצה H_1 לקבוצה H_2.
14. הסימון $\vee$ הוא הקשר הלוגי "או"