אנליזה מודרנית 1 - תרגול 7

10 בדצמבר 2014

תזכורת:

הוכחנו בשבוע שעבר

משפט לוזין:

נניח ש$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ אזי לכל $\epsilon>0$ קיימת $A\subset[0,1]$ מדידה כך ש$m(A)\geq 1-\epsilon$ ו־$f\mid_A$ רציפה.

לדוגמה:

$S=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $f:=\mathbb{1}_S$. $\mathbb{Q}\cap[0,1]=[0,1]\setminus S$ בת מנייה. לכן נוכל להציג אותה כסידרה $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$. יהי $\epsilon>0$ ונגדיר $\forall n\in\mathbb{N}$ את הקטע

$$\begin{aligned} I_n: &= \left(a_n-\epsilon 2^{-n-1},a_n+\epsilon 2^{-n-1}\right) \\ m\left(I_n\right) &= \epsilon 2^{-n} \end{aligned}$$

ולכן:

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m\left(I_n\right)=\epsilon$$

נגדיר: $A:=[0,1]-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)$ אזי A סגורה (בפרט מדידה), חלקית ל$[0,1]$ ולא מכילה רציונאלים. לכן $A\subseteq S$ מדידה ומתקיים:

$$m\left(A\right)=m\left([0,1]-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\right)\geq 1-\epsilon$$

ובנוסף

$$f\Big|_A=1$$

קבועה בפרט רציפה.(Ω,S,μ) מרחב מידה.

תרגיל

נניח $f_n\left(x\right)\to 0$ כב"מ, f_n מדידות. האם נכון לומר ש:

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=0\Rightarrow\exists g\in L\left(\Omega\right)\text{ s.t }\forall n:f_n\leq g$$

פתרון

נתבונן בדוגמה הבאה: נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}1/n & n-1\leq x<n\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f_n\left(x\right):\left[0,\infty\right)\to\left[0,1\right]$$

קל לראות ש$f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ וגם $\int f_n dm\leq\frac{1}{n}\to 0$. נניח כי קיימת g אינטגרבילית כך ש: $f_n\leq g$ לכל n . אזי $\int_{[0,\infty)}f_n dm\leq\int_{[0,\infty)}gdm$ לפי מונוטוניות האינטגרל ביחס לאינטגרנד.

$$\infty>\int_{[0,\infty)}gdm=\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\mathbb{1}_{[n-1,n]}\right)dm\geq\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\left(\mathbb{1}_{[n-1,n]}\right)dm=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

סתירה.

משפט ההתכנסות המונוטונית

אם f_nסידרת פונקציות מדידות $f_1\leq f_2\leq\cdots<\infty$ אזי קיימת f כך ש= $f\left(x\right)$ $\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$ כב"מ ומתקיים

$$\int\lim_{n\to\infty}f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$

תרגיל:

$\left(\Omega,S,\mu\right)$ מרחב מידה. $f:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה המקיימת $\int_\Omega\left|f\right|d\mu=0$. הוכיחו שהקבוצה שבה $f\neq 0$ היא בעלת מידה 0.

הוכחה:

נגדיר $E:=\left\{x\mid f\left(x\right)\neq 0\right\}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$, $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. $f_n\left(x\right)=n\left|f\left(x\right)\right|$. קל לראות שהסידרה $\left\{f_n\right\}$ עומדת בתנאים של משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן:

$$\int_\Omega\lim_{n\to\infty}n\left|f_n\right|d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega n\left|f\right|d\mu=\lim_{n\to\infty}n\int_\Omega\left|f\right|d\mu=0$$

ונניח בשלילה ש$E \subset \Omega, \mu(E) > 0$ ולכן:

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} n|f|\,d\mu \geq \int_{E} \lim_{n\to\infty} n|f|\,d\mu$$

המעבר האחרון נובע מכך ש$|f| \geq 0$ וממונטוניות של ה$\int$ביחס לנקודה. אבל $\left| f\Big|_{E}(x) \right| >$ $\forall x \in E : f(x) \neq 0 \Leftarrow 0$. לכן

$$f_n\big|_E(x) = nf\Big|_E(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ובסה"כ

$$0 = \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} n|f|\,d\mu \geq \int_{E} \lim_{n\to\infty} n|f(x)|\,d\mu = \int_{E} \infty d\mu = \infty$$

סתירה!

למת $Fatou$ (הניסוח במקרה הכללי)

תהי $\{f_n\}$סידרת פו' מדידות או שליליות אזי

$$\int \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu$$

באופן שקול $\{\varphi_n\}$ סידרת פונקציות מדידות אי שליליות, ויהי c כך ש-$\int f_{n_i} \leq c$עבור תת סידרה $\{f_{n_i}\}$ עבורה קיימת fכך ש $f_n \to f$ כב"מ. אזי $\int f d\mu \leq c$. וודאו בבית.

תרגיל

נניח f_n, f, g_n, g אינטגרביליות ומתקיים:

1. $f_n \xrightarrow{a.e} f; g_n \xrightarrow{a.e} g$.
2. $|f_n| \leq g_n \quad \forall n$
3. $\int g_n \to \int g$

הוכיחו ש$\int f_n \to \int f$.

הוכחה:

נגדיר סידרה חדשה של פונקציות חיוביות $h := g_n - f_n$. עפ"י למת פאטו בגירסה הכללית

$$\underline{\lim} \int h_n d\mu \geq \int \underline{\lim} h_n d\mu$$

אולם:

$$\underline{\lim} \int h_n d\mu = \underline{\lim} \int g_n - f_n = \underline{\lim} \int g_n + \underline{\lim} \int f_n = \lim \int g_n + \underline{\lim} \int -f_n = \int g - \overline{\lim} \int f_n$$

$$\int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}\left(g_n - f_n\right) = \int g - \int f$$

קיבלנו ש

$$\overline{\lim} \int f_n = \int f$$

כעת נגדיר סדרת פונקציות חדשה $h_n = f_n + g_n$. שוב, לפי פאטו:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \int h_n &\geq \int \underline{\lim} h_n \\ \underline{\lim} \int h_n - \underline{\lim} \int g_n + f_n &= \underline{\lim} \int f_n + \int g \end{aligned}$$

$$\underline{\lim} \int h_n \geq \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(f_n + g_n) = \int f + g$$

לכן

$$\int f \leq \lim \int f_n$$

ובסה"כ

$$\overline{\lim} \int f_n \leq \int f \leq \underline{\lim} \int f_n \leq \overline{\lim} \int f_n$$

$\Leftarrow \lim \int f_n = \int f$ כנדרש.

התכנסות נשלטת

יהיו $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ מדידות כך ש: $f_n \xrightarrow{a.e} f$ וכן קיימת פונקציה אינטגרבילית g כך ש:

$$\forall n \quad |f_n| \leq g$$

אזי f_n, f אינטגרביליות ומתקיים ש $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

תרגיל:

תהא פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה, מדידה לבג ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול הבא קיים וחשבו אותו :

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) g\left(x\right) dm$$

פתרון

נוכל לרשום את האינטגרל באופן הבא:

$$\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\, \mathbb{1}_{(-n,n)}(x)\, dm$$

כעת נגדיר את סידרת הפונקציות המדידות

$$h_n(x) := f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\, \mathbb{1}_{(-n,n)}(x)$$

f רציפה ב$x_0 = 1$ ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = f(1)$$

וקיימת פונקצית הגבול

$$h(x) := \lim h_n(x) = f(1)\, g(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) = f(1)\, g(x)$$

יהי M חסם של f , אז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$|h_n(x)| \le M\, |g(x)|$$

והפו' באגף ימין אינטגרבילית. לכן, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא

$$I = f(x) \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dm$$

תרגיל:

$f, f_n : \Omega \to [0,\infty)$ פו' מדידות כך ש$f_n \xrightarrow{a.e} f$ ו־$f_n \le f$ לכל n . הוכיחו $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$.

הוכחה:

נחלק ל־2 מקרים

1. $\int f = \infty$, עפ"י למת פאטו, $\underline{\lim} \int f_n \ge \int \underline{\lim} f_n = \int f = \infty$. לכן מתקיים הנדרש:

$$\lim \int f_n = \infty = \int f$$

2. $\int f < \infty$ אזי הסידרה f_n נשלטת עפ"י האינטגרביליות f ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

תרגיל

יהיו $f, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית כך ש־$f_n \to f$ כב"מ. הוכיחו:

$$\int |f_n - f| \to 0 \Leftrightarrow \int |f_n| \to \int |f|$$

הוכחה

יוון ראשון $\Rightarrow$. נניח כי $\int |f_n - f| \to 0$ אזי:

$$\int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \geq \int_\Omega ||f_n| - |f|| \, d\mu$$

אי"ש המשולש ומונטוניות האינטגרל ביחס לאינטגרנד (נקצר להבא כמאב"א)

$$\geq \left| \int_\Omega |f_n| - |f| \, d\mu \right| = \left| \int |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu \right|$$

לכן

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu \right| \geq 0$$

$\int_\Omega |f_n| \to \int_\Omega |f|$ $\Leftarrow$. בכיוון השני נניח כי

$$\int_\Omega |f_n| \to \int_\Omega |f|$$

נשים לב:

$$g_n := |f| + |f_n| \geq |f - f_n|$$

וברור ש־g_n אינטרגרבילית (כסכום אינטגרביליות) וכי $g_n \to g := 2|f|$ כב"מ. בנוסף

$$\int g_n \to \int g$$

לפי ההנחה. כעת לפי התרגיל הקודם (עבור $|f - f_n|, 0, g_n, g$) נקבל:

$$\lim \int_\Omega |f - f_n| = \int_\Omega \lim |f - f_n| = 0$$

כנדרש.