אינפי 3, תרגול 9

15 בינואר 2014

פונקציות סתומות הגדרה: תהי $F(x,y)$ מוגדרת בתחום D ו־$\Delta=[a,b]\times[c,d]$ מלבן ב־D. נאמר שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את y כפונ' סתומה של x במלבן Δ, אם לכל $a\le x\le b$ יש y יחיד בקטע $[c,d]$ כך ש$I(x,y)=0$.

דוגמה 1: נתונה המשוואה $y+0.5\sin y-x=0$. האם מש' זו מגדירה את y כפו' של xלכל ערכי x?

תשובה: נבודד דווקא את $x(y)$ בהתחלה:

$$x(y)=y+0.5\sin y$$

זו פונקציה גזירה של y לכל y ומתקיים:

$$x\prime(y)=1+0.5\cos y>0$$

עולה לכל y. לכן, $x(y)$ הפיכה שיש לה פונקציה הפוכה $y(x)$ המוגדרת לכל x.

משפט הפונ' הסתומה: (תנאי מספיק שלא הכרחי לקיום פונקציה סתומה) נתונה המשוואה $F(x,y)=0$, כאשר F מוגדרת בסביבה D של (x_0,y_0) ואם $F(x,y),F\prime_x(x,y),F'_y(x,y)$ רציפות ב־D ו: $\begin{cases}F(x_0,y_0)=0\\F'_y(x_0,y_0)\neq 0\end{cases}$ אז קיים מלבן $\Delta=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\epsilon\}$ כך שהמשוואה הנ"ל מגדירה את y כפונקציה של x בΔ ונסמן $y=f(x)$. <u>בנוסף:</u> $y_0=f(x_0)$ ולכל $x\in|x-x_0|<\delta$ עבורו $F'_y(x,f(x))\neq 0$ והפונ' $y=f(x)$ גזירה ברציפות ובעלת נגזרת:

$$\frac{df}{dx}(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,y(x))}$$

דוגמה 2: נתונה המשוואה $x^y-y^x-y=0$. האם בסביבת הנקודה $(2,1)$ המשוואה הנ"ל מגדירה פו' סתומה $y=y(x)$? אם כן חשב את $y\prime(2)$.

תשובה: נגדיר $F(x,y)=x^y-y^x-y$. נבדוק את תנאי המשפט: ברור כי F רציפה בסביבת $(2,1)$ ו־$x>0,y>0$ ובסביבת $(2,1)$:

$$\begin{aligned} \text{continious\_} \quad F_x(x,y) &= yx^{y-1}-y^x\cdot\ln y \\ \text{continious} \quad F_y(x,y) &= x^y\ln x - xy^{x-1}-1 \\ F'_y(2,1) &= 2\ln 2-3\neq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$תנאי המשפט מתקיימים , לכן $y=y(x)$ אכן פונקציה סתומה המוגדרת בסיבבת $(2,1)$.
לפי המשפט זו פונקציה גזירה ובסביבה הנ"ל מתקיים:

$$y\prime(2)=-\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)}=\frac{1}{3-\ln 4}$$

דוגמה 3: נתונה המשוואה $x^2+y^2=25$ (זה מעגל קנוני ברדיוס 5).

1. כמה פונקציות $y=y(x)$ המוגדרות בקטע $-5\leq x\leq 5$ מקיימות את המשוואה?
2. כמה מהפונקציות הנ"ל הן רציפות?

תשובה:

1. יש $2^{\aleph}$ פונקציות שונות. ניתן לחלק את הקטע $[-5,5]$ לחלקים כרצוננו ועליהם להגדיר $\pm\sqrt{25-x^2}$ בסדר מסוים, למשל:

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & -5\leq x<-3 \\ -\sqrt{25-x^2} & -3\leq x<0 \\ \sqrt{25-x^2} & 0\leq x\leq 5\end{cases}$$

[בדקנו שמשפט הפונקציה הסתומות לא מתקיים כאן]

2. יש רק 2 פונקציות רציפות:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= +\sqrt{25-x^2} \\ y_2(x) &= -\sqrt{25-x^2} \end{aligned}$$

משפט פונקציה סתומה לכמה משתנים: בהנתן משוואה $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0 \quad (\star)$ כאשר F היא פונקציה של $n+1$ משתנים , המוגדרת בסביבה D של נקודה $(x_1^0,x_2^0,\ldots x_n^0,y^0)$ ונניח כי $F\in C^1(D), F(A)=0$ ובנוסף $F\prime_y(A)\neq 0$ אז קיימת תיבה n־מימדית: $|x_i-x_i^0|<\delta_i$ המוכלת ב־D, כך ש$(\star)$ מגדירה בסביבה זו את y כפו' סתומה של שאר המשתנים: $y=y(x_1,\ldots x_n)$. הפונקציה הנ"ל גזירה ברציפות בכל אחד מהמשתנים ומתקיים:

$$y\prime(x_i)=\frac{-F'_{x_i}}{F'_y}$$

דוגמה 4: נתונה המשוואה:

$$y^3+xz+y^2+e^z-3=0$$

1. להוכיח כי המש' הנ"ל מגדירה פונקציה $z=z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,0)$.
2. לחשב $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ישירות לפי כלל שרשרת (ולא מהתוצאה במשפט). (בסביבות $(1,1)$)

הוכחה:

1. נגדיר:

$$F(x,y,z)=y^3+xz+y^2+e^z-3$$

הפונקציה הנ"ל היא סכום של פונקציות אלמנטריות ב־x,y,z ולכן $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$.
מתקיים $F(1,1,0)=0$ (הצבה ישירה) וכן:

$$F'_z(1,1,0)=x+e^z\mid_{(1,1,0)}=2\neq 0$$

$\Leftarrow$מתקיימים כל תנאי המשפט ולכן יש סביבה של $(1,1)$ במישור xy, שבתוכה מוגדרת הפונקציה $z=z(x,y)$.

2. נתבונן במשוואה המקורית: $y^3+x\cdot z(x,y)+y^2+e^{z(x,y)}-3=0$. נגזור $\Leftarrow z(x,y)=x\cdot z'_x(x,y)+e^{z(x,y)}\cdot z'_x(x,y)=0$. באופן דומה נקבל:

$$z'_y(x,y)=-\frac{3y^2+2y}{x+e^z}$$

דוגמה 5:

תהי $F(x,y,z)\in C^1(\mathbb{R}^3)$ ונניח כי בסביבת Δ של נקודה (x_0,y_0,z_0) המש' $F(x,y,z)=0$ מגדירה שלוש פונקציות:

$$x=x(y,z),y=y(x,z),z=z(x,y)$$

באופן יחיד. לחשב: $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=?$.

תשובה: ממשפט הפונקציות הסתומות מתקיים, לכן אפשר להשתמש בתוצאה לגבי הנגזרת:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\cdot\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)\cdot\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)=-1$$

מערכת פונקציות סתומות:

נתבונן ב־m משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$\begin{array}{rcl}(\star)\quad F_i(x_1,\dots x_n,y_1,\dots y_m) & = & 0\\ i & = & 1,\dots,m\end{array}$$

משפט: עבור מערכת $(\star)$, כאשר כל הפונקציות $F_1,\dots,F_m$ גזירות ברציפות לפי כל המשתנים בסביבה D של נק' $P(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ ונניח $F_i(P)=0$ לכל i ונניח $J\neq 0$ בנקודה P אזי קיימת סביבה Δ של P כך שבסביבה זו המערכת $(\star)$ מגדירה m פונקציות $y_k(x_1,\dots,x_n)\in C^1(\Delta)\quad ,k=1,2,\dots,m$.

דוגמה: נתונה המערכת: $\begin{cases} xu+yv=3 \\ 2x+u^2+y+v^2=4 \end{cases}$ להוכיח כי מער' זו מגדירה, בסביבה של הנק' $P(-1,1,-1,2)$ שתי פונקציות $\begin{matrix} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{matrix}$, בעלות נגזרות חלקיות רציפות.

תשובה:

נגדיר

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= xu+yv-3 \\ G(x,y,u,v) &= 2x+u^2+y+v^2-4 \quad \in C^1(\mathbb{R}^4) \end{aligned}$$

בנוסף, $G'_u=2u, G'_v=2v, F'_u=x, F'_v=y$. כעת:

$$J=\begin{vmatrix} F'_u & G'_u \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y \\ 2u & 2v \end{vmatrix}=2xv-2yu\mid_p=-2\neq 0$$

ולכן כל התנאים מתקיימים והטענה נובעת.