

פונקציות מרוכבות – תרגיל 6

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_{\gamma} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$ כאשר γ נתונה לפי $|z-1|=1$ נגד כיוון השעון.

ב. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ נגד כיוון השעון

ג. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$ נגד כיוון השעון

ד. $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$ כאשר $\gamma(t) = it, -1 \leq t \leq 1$ נתונה לפי

2. חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$ (נגד כיוון השעון) עם התנאי $|a| \neq \rho > 0$. רמז: השתמשו

במשוואות $z\bar{z} = \rho^2$ וגם $|dz| = -i\rho \frac{dz}{z}$.

3. הראו שהפונקציה $f(z) = \operatorname{Re} z$ איננה שלמה, ע"י חישוב אינטגרל של פונקציה זו על עקומה סגורה.

4. השתמשו בנוסחת אינטגרל קושי עבור $\oint_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$ (קבוע ממשי) בכדי להוכיח ש-

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi \quad \text{ו-} \quad \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$