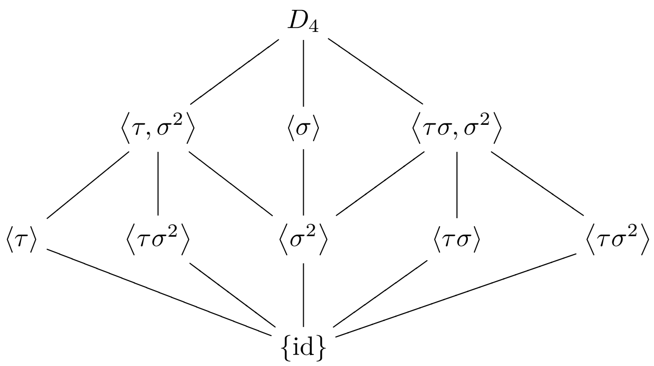
פתרון תרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

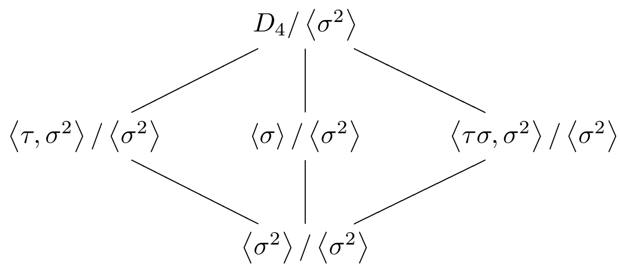
שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. לפניכם סריג תת־החבורות של D_4:



מצאו את סריג תת־חבורות של $D_4/\langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות שלה בעזרת משפטי האיזומורפיזמים.

פתרון. בעזרת משפט ההתאמה, נקבל את התרשים הבא



שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של G/H לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

1. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

2. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

פתרון.

1. זה ממש לפי משפט ההתאמה. ההכלה הדו־כיוונית בפירוט:

$$\begin{aligned} xH \in (K_1/H) \cap (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1/H) \wedge xH \in (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \wedge x \in K_2 &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \cap K_2 &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1 \cap K_2)/H & \end{aligned}$$

2. לפי הסעיף הקודם נסיק ש-$(K_1 \cap K_2)/H$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G/H המוכלת ב-K_1/H וב-K_2/H.

שאלה 3. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

פתרון. מיידי משימוש כפול במשפט האיזומורפיזם השני:

$$(HN_1)/N_1 \cong H/(N_1 \cap H) = H/(N_2 \cap H) \cong (HN_2)/N_2$$

שאלות רגילות

שאלה 4. תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית סופית, $H \leq G$ תת־חבורה מאינדקס סופי ונניח $([G:H], |N|) = 1$. הוכיחו כי $N \leq H$.

פתרון. קל לראות כי $|N \cap H| \leq |N| < \infty$. לפי משפט האיזומורפיזם השני $NH/N \cong H/(N \cap H)$. מפני ש-N נורמלית, אז $NH \leq G$ ובנוסף $NH = HN$. עם הוכחה דומה לזו שבמשפט האיזומורפיזם השני ניתן להראות (הראו!) שלכל זוג תת־חבורות מתחלפות, ואין אפילו צורך שאחת מהן תהיה נורמלית, מתקיים $[NH:H] = [N:N \cap H]$. ביחד עם הנתון $[G:H] < \infty$ ומכפליות האינדקס נקבל

$$[G:H] = [G:NH][NH:H] = [G:NH]\frac{|N|}{|N \cap H|}$$

לכן $[G:H] \mid [G:NH] \cdot |N|$. אבל $([G:H], |N|) = 1$, ולכן $[G:H]$ מחלק את $[G:NH]$. מפני ש-$H \leq NH$ נסיק $[G:H] = [G:NH]$. מכאן נקבל

$$[N:N \cap H] = [NH:H] = 1$$

ולכן $N \leq H$.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית ותהינה $H, N \leq G$ תת־חבורות.

1. הפריכו ש-$HN \leq G$ היא תמיד תת־חבורה.
2. אם $H, N \lhd G$ נורמליות כך ש-$([G:H], [G:N]) = 1$, הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

פתרון.

1. אפשר לבחור את $G = D_4$ וצריך לבחור תת־חבורות שאינן נורמליות. נבחר את $H = \langle \tau \rangle, N = \langle \tau\sigma \rangle$. הקבוצה $HN = \{\mathrm{id}, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma \cdot \sigma = \tau\sigma^2 \notin HN$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1} \notin HN$.

   דוגמה פופלרית אחרת היא $G = S_3$ ו-$H = \langle (12) \rangle, N = \langle (23) \rangle$. אז בקבוצה HN ישנם ארבעה איברים $\{\mathrm{id}, (12), (23), (123)\}$. לפי משפט לגראנז' הסדר של תת־חבורה מחלק את סדר החבורה, אבל 4 לא מחלק את $|S_3| = 6$, שזו סתירה.

2. הוכחה: בכיתה למדנו שמפני ש-$H, N \lhd G$, אז HN היא תת־חבורה (ואפילו נורמלית). בנוסף $H, N \leq HN$. מכפליות האינדקס נקבל

$$[G : H] = [G : HN] [HN : H]$$

   וטענה דומה עבור N. לכן $[G : HN]$ מחלקת את $[G : H]$ ואת $[G : N]$. מהנתון שהאינדקסים האלו זרים נסיק כי $[G : HN] = 1$, ולכן $G = HN$.

תהי G חבורה, תהינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H \subseteq K \subseteq G$, אז

$$(G/H) / (K/H) \cong G/K$$

בשאלה זו נוכיח את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי הדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H \lhd K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f \colon {}^{G}/_{H} \to {}^{G}/_{K}$ לפי $f(gH) = gK$.

1. הוכיחו ש-f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1H = g_2H$, אז $f(g_1H) = f(g_2H)$.
2. הוכיחו ש-f הומומורפיזם.
3. הוכיחו ש-f על.
4. הוכיחו כי $\ker f = {}^{K}/_{H}$.
5. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

פתרון.

1. נניח כי $g_1H = g_2H$ עבור $g_1, g_2 \in G$. לכן $g_1g_2^{-1} \in H$. אבל $H \subseteq K$, כלומר $g_1g_2^{-1} \in K$, ולכן $g_1K = g_2K$. מכאן $f(g_1H) = f(g_2H)$, כדרוש.
2. יהיו $g_1H, g_2H \in {}^{G}/_{H}$. אזי

$$f((g_1H)(g_2H)) = f(g_1g_2H) = g_1g_2K = (g_1K)(g_2K) = f(g_1H) f(g_2H)$$

   כאשר השתמשנו בפעולות של חבורות המנה (הרי $H, K \lhd G$).
3. יהי $gK \in {}^{G}/_{K}$. לכן $f(gH) = gK$, ומכאן ש-f על.
4. נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{gH \in {}^{G}/_{H} \,\middle|\, f(gH) = e_{G/K}\right\} = \{gH \in {}^{G}/_{H} \mid gK = K\} \\ &= \{gH \in {}^{G}/_{H} \mid g \in K\} = {}^{K}/_{H}\end{aligned}$$

5. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $(G/H)\,/\ker f\cong \operatorname{im} f$ ולכן $(G/H)\,/\,(K/H)\cong$
$.G/K$

שאלה 6. תהי G חבורה ותהי $N\lhd G$. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

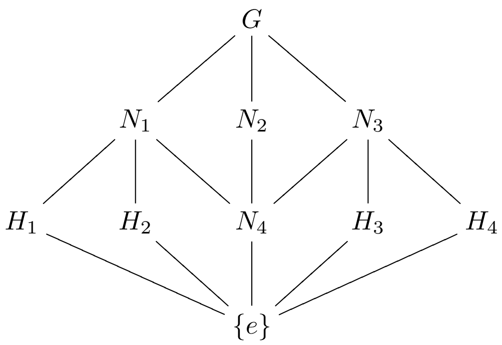
1. אם $K\lhd G$ וגם $N\cong K$, אז $.{}^{G}/_{N}\cong {}^{G}/_{K}$
2. אם $G\cong {}^{G}/_{N}$, אז $.N=\{e_G\}$
3. אם N חבורת-2 לא טריוויאלית, וגם ${}^{G}/_{N}$ חבורת-2 לא טריוויאלית, אז G אבלית.
4. תת־חבורת הקומוטטורים G' היא אבלית.

פתרון.

1. ראינו בכיתה כי $n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ עבור $n\neq 0$. החבורה $G=\mathbb{Z}$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. כמו כן ראינו ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_n$. לכן אם נבחר $N=2\mathbb{Z}$ ו-$K=3\mathbb{Z}$ נקבל כי $N\cong K$, אבל המנות ${}^{G}/_{N}\cong\mathbb{Z}_2$ ו-${}^{G}/_{K}\cong\mathbb{Z}_3$ לא איזומורפיות כי הן מסדר שונה.
2. ברור שחייבים לבחור חבורה אינסופית. הרי אם G סופית ו-$|N|>1$, אז $|{}^{G}/_{N}|=|G|\,/\,|N|$ קטן ממש מ-$|G|$. הדרך הנוחה למצוא פתרון היא למצוא אפימורפיזם $f\colon G\to G$ שהוא לא מונומורפיזם. אז הגרעין שלו הוא תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים $.{}^{G}/_{\ker f}\cong G$
נבחר $G=\mathbb{C}^*$, ונגדיר אפימורפיזם $f\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ לפי $.f(x)=x^2$ ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אפימורפיזם. הגרעין $\ker f$ איננו טריוויאלי, כי גם $.-1\in\ker f$
אפשרות אחרת היא $G=\mathbb{R}[x]$, אוסף הפולינומים הממשיים, עם הפעולה של חיבור פולינומים. אפשר לוודא שזו אכן חבורה, ושהיא אבלית. נבחר את אוסף הפולינומים הקבועים $.H=\{a_0 : a_0\in\mathbb{R}\}$ ברור ש-$H\neq\{0\}$ (הפולינום הקבוע 0 הוא איבר היחידה ב-G), אבל מתקיים ${}^{G}/_{H}\cong G$. נסו למצוא דוגמאות נוספות.
3. למעשה כל חבורה לא אבלית מסדר 2^n תתאים, ועבורה נבחר את $.N=Z(G)$ אפשר לבחור למשל את D_4 או Q (אלו הן האפשרויות היחידות מסדר 8). המרכז של חבורת-2 סופית אינו טריוויאלי, ואם נדרוש שאינה אבלית אז הוא גם לא כל החבורה. המנה של חבורת-2 גם הוא חבורת-2, ובפרט ${}^{G}/_{N}$. היא לא טריוויאלית כי N לא טריוויאלית.
4. אפשר לבחור את $G=S_5$, ואז $G'=A_5$ אינה אבלית. למעשה מספיק להראות כי $(234)\,,(123)\in S_n'$ עבור $n\geq 4$, ואלו איברים שאינם מתחלפים.
דוגמה אחרת $G=GL_2(\mathbb{R})$ ואז $G'=SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית.

שאלות אתגר

שאלה 7. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!