

תרגיל 9

1. הוכיחו/הפריכו:

(א) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

(ב) $(2, 5) \cup (7, 8) \cong (-3, -1) \cup \{0\}$.

2. יהי X מרחב טופולוגי עם התכונה שלכל נקודה ב- X יש סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל רכיב קשירות מסילתית הוא פתוח. הסיקו שכל רכיב קשירות מסילתית הוא גם סגור.

3. הוכיחו:

(א) מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"ם הוא סופי.

(ב) יהי X מרחב קומפקטי, ו- $\{F_i\}$ אוסף של קבוצות סגורות, כך שהחיתוך של כל מספר סופי מתוכם אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי ו- A_1, \dots, A_n תתי מרחבים קומפקטיים. הוכיחו ש- $A_1 \cup \dots \cup A_n$ קומפקטי.

(ב) תנו דוגמה נגדית עבור איחוד אינסופי.

(ג) יהי X מ"ט האוסדורף, ו- $\{F_i\}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים. הוכיחו ש- $\bigcap F_i$ קומפקטי.

5. יהי X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $f: X \rightarrow Y$ חח"ע ועל.

(א) הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ו- X האוסדורף אז Y האוסדורף.

(ב) הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף אז X האוסדורף.

6. יהי X מרחב טופולוגי ויהי $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים. הוכיחו ש $\bigcap E_i \neq \emptyset$. תנו דוגמא נגדית במקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש X אינו האוסדורף.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפטי. הוכיחו שקיים ב X מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים, ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.

(ג) יהי X מרחב טופולוגי כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש X קומפקטי.