שאלות פתוחות תרגיל בית 11

1. נגדיר את הפונקציה הבאה בקטע $(-1,1)$:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(א) הוכיחו כי $f(x)$ גזירה בקטע וחשבו את נגזרתה.
פתרון: בנקודות $x\neq 0$ ברור שהיא גזירה וניתן לחשב את הנגזרת ע"י נוסחאות רגילות

$$(x^2\sin\frac{1}{x^2})'=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\frac{-2}{x^3}=2x\sin\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

בנקודה $x=0$ צריך לבדוק לפי הגדרה

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

בתור מכפלה של פונקציה חסומה עם פונקציה ששואפת ל 0.
ולכן בסך הכל

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(ב) הראו כי הנגזרת $f'(x)$ אינה חסומה בקטע.
פתרון: היות ש $2x\sin\frac{1}{x^2}$ חסומה בקטע, מספיק להראות ש $g(x)=2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ אינה חסומה בקטע. נבחר את הסדרה

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

שהיא נמצאת בקטע אבל

$$g(a_n)=2\sqrt{2\pi n}$$

שהיא לא סדרה חסומה.

(ג) האם $f'(x)$ רציפה בקטע? אם כן - הוכיחו. אם לא - מצאו וסווגו נקודות אי רציפות.
פתרון: אם היא הייתה רציפה היא הייתה חסומה בקטע הסגור $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ אבל היא לא. ולכן היא לא רציפה. מהנגזרת שחישבנו קודם ברור שבעיית הרציפות היא בנקודה $x=0$. בנוסף מסעיף ב' רואים שהגבול החד צדדי

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)$$

לא קיים (הפרכה לפי היינה) ולכן זו נקודת אי רציפות מסוג 2.

2. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במ"ש על קטע סופי I (למשל (a,b)). הוכיחו כי $f(x)$ חסומה.

פתרון: דרך א': היות שהקטע סופי, יש מספר $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x,y \in I$ מתקיים

$$|x-y| \leq M$$

עכשיו, נבחר $\epsilon = 1$. לפי הגדרת רציפות במ"ש, יש $0 < \delta$ כך שאם

$$|x-y| \leq \delta$$

אז מתקיים

$$|f(x)-f(y)| \leq 1$$

עכשיו ניקח $x,y \in I$ כלשהם. המטרה שלנו היא להראות שיש $K > 0$ כך ש $|f(x)-f(y)| \leq K$. בלי הגבלת כלליות $x < y$. וניקח בינהם נקודות

$$x = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = y$$

כך ש $|x_{i+1}-x_i| < \delta$. כמה נקודות כאלה צריך? קטע באורך δ "נכנס" בתוך M, $\frac{M}{\delta}$פעמים. אפשר להגיד בוודאות שמספר הנקודות הדרושות קטן מ $2\frac{M}{\delta}$, כלומר $r \leq \frac{2M}{\delta}$.

כעת,

$$|f(x)-f(y)| = |\sum_{i=0}^{r-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))| \leq \sum_{i=0}^{r-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

וזה לפי בחירת δ יותר קטן מ

$$\sum_{i=0}^{r-1} 1 = r \leq \frac{2M}{\delta}$$

קיבלנו שf חסומה כנדרש.

דרך ב': באמצעות סדרות. ראשית יש להוכיח שאם a_n סדרת קושי אז גם $f(a_n)$ סדרת קושי (כאשר f רציפה במ"ש) נוותר על ההוכחה הזאת כאן. עכשיו נניח ש f לא חסומה. בלי הגבלת כלליות היא לא חסומה מלעיל. אז לכל $n \in \mathbb{N}$נבחר a_n כך ש $f(a_n) > n$. עכשיו a_n נמצא באיזהוא קטע סופי ולכן יש לה תת סדרה a_{n_k} שמתכנסת (למספר ב $\mathbb{R}$ שאינו בהכרח בתוך הקטע!) ולכן a_{n_k} סדרת קושי ולכן $f(a_{n_k})$ סדרת קושי ולכן מתכנסת בסתירה לכך שהיא לא חסומה.