שאלה מס' 6 – פתרונות סופיים

1 א

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \dots\right)$$

פתרון:

$(*)\ y'' + xy = 0$

נחפש פתרון כללי של $(*)$ בצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \cdot x^n$$

נציב ב-$(*)$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 \cdot x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 \cdot x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) \cdot a_{n+3} + a_n\right] \cdot x^{n+1} = 0$$

השוואת מקדמים:

$x^0: \ 2a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_2 = 0}$

ועבור שאר המקדמים נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$(n+3)(n+2) \cdot a_{n+3} + a_n = 0$$

$$\boxed{a_{n+3} = \frac{-a_n}{(n+3)(n+2)} \qquad n = 0,1,2,\dots}$$

$a_2 = 0$ — a_0, a_1 – קבועים חופשיים

$n=0: \ a_3 = \frac{-a_0}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6} a_0$

$n=1: \ a_4 = -\frac{a_1}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{12} a_1$

$n=2: \ a_5 = \frac{-a_2}{5 \cdot 4} = 0$

$n=3: \ a_6 = \frac{-a_3}{6 \cdot 5} = -\frac{1}{30} a_3 = \frac{1}{180} a_0$

$n=4: \ a_7 = \frac{-a_4}{7 \cdot 6} = -\frac{1}{42} a_4 = \frac{1}{504} a_1$

סה״כ, הפתרון הכללי של ⊛ הוא:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6-\ldots\right)$$
$$+a_1\left(x-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7-\ldots\right)$$

ב

$$y=a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}x^{2k}+a_1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

ג

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{672}x^8+\ldots\right)$$
$$+a_1\left(x+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{1440}x^9+\ldots\right)$$

ד

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{60}x^5-\ldots\right)$$
$$+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{60}x^5-\ldots\right)$$

$$⊛\; y''+(x-1)y'-y=0$$

פתרון:

נחפש פתרון בצורה:
$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\cdot x^n$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\cdot x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n$$

נציב ב ⊛ :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\cdot x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\cdot x^n$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=0$$

$$(2a_2-a_1-a_0)\cdot x^0+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3}+(n+1)a_{n+1}-(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}\right]x^{n+1}=0$$

השוואת מקדמים:

$$x^0:\; 2a_2-a_1-a_0=0 \;\Rightarrow\; \underline{a_2=\frac{a_0+a_1}{2}}$$

ועבור שאר המקדמים נקבל:

$$(n+3)(n+2)a_{n+3} + n \cdot a_{n+1} + \cancel{a_{n+1}} - (n+2)a_{n+2} - \cancel{a_{n+1}} = 0$$

$$\boxed{a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2} - n \cdot a_{n+1}}{(n+3)(n+2)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

a_0, a_1 - קבועים חופשיים.

$$a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1$$

$$n=0: \quad a_3 = \frac{2a_2 - 0}{6} = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{6}a_1$$

$$n=1: \quad a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{12} = \frac{\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 - (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1)}{12} = 0$$

$$n=2: \quad a_5 = \frac{4a_4 - 2a_3}{20} = -\frac{1}{10}a_3 = -\frac{1}{60}a_0 - \frac{1}{60}a_1$$

ולכן, הפתרון הכללי של ⊛:

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{60}x^5 - \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{60}x^5 - \ldots\right)$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{45}x^6 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right) \quad \text{ה}$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \ldots\right) + a_1 \cdot x \quad 1$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \ldots \quad \text{ו} \quad 2$$

$$y = x - \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{252}x^7 - \ldots \quad \text{ז}$$

Scanned by CamScanner

$$(*)\quad y''+x^2y'+xy=0\,,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

פתרון:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\cdot x^n$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\,a_n\cdot x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\cdot a_{n+2}\cdot x^n$$

נציב ב $(*)$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\cdot x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{n+1}=0$$

$$2a_2\cdot x^0+(6a_3+a_0)\cdot x^1+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)a_{n+4}+(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}\right]x^{n+2}=0$$

השוואת מקדמים:

$$x^0:\ 2a_2=0\ \Rightarrow\ \underline{a_2=0}$$

$$x^1:\ 6a_3+a_0=0\ \Rightarrow\ \underline{a_3=-\frac{1}{6}a_0}$$

ועבור שאר המקדמים נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$(n+4)(n+3)a_{n+4}+(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}=0$$

$$\boxed{a_{n+4}=\frac{-(n+2)\cdot a_{n+1}}{(n+4)(n+3)}\,,\quad n=0,1,2,\dots}$$

a_0, a_1 - קבועים חופשיים.

$$a_2=0$$

$$a_3=-\frac{1}{6}a_0$$

$\underline{n=0}$: $a_4=\dfrac{-2a_1}{12}=-\dfrac{1}{6}a_1$

$\underline{n=1}$: $a_5=\dfrac{-3a_2}{20}=0$

$\underline{n=2}$: $a_6=\dfrac{-4a_3}{30}=-\dfrac{2}{15}a_3=\dfrac{1}{45}a_0$

$\underline{n=3}$: $a_7=\dfrac{-5a_4}{42}=\dfrac{5}{252}a_1$

5

לכן, הפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{45}x^6-\dots\right) + a_1\left(x-\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{252}x^7-\dots\right)$$

נמצא פתרון פרטי שמקיים:

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

נקבל ש $a_0=0$

$a_1=1$

ולכן, הפתרון הפרטי הוא:

$$\underline{y = x-\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{252}x^7-\dots}$$

3

ב

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{k^2-\alpha^2}{(k+2)(k+1)}\cdot a_k}$$

ג

$T_0(x)=a_0$

$T_1(x)=a_1x$

$T_2(x)=a_0(1-2x^2)$

$T_3(x)=a_1\left(x-\frac{4}{3}x^3\right)$