אלגברה ליניארית 2
פתרון תרגיל 2

1. תהיי $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$. מצא:

א. הפולינום האופייני וערכים עצמיים של B.
ב. קבוצה מקסימאלית S של וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית של B.
ג. האם B ניתנת ללכסון? אם כן, מצא P כך ש $P^{-1}BP$ היא אלכסונית.

1.
א.
הפולינום האופייני הוא

$$|\lambda I-B|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda+3)\left[(\lambda-5)(\lambda+2)+6\right]+7(\lambda+2)-6-42-6(\lambda-5)=$$

$$=(\lambda+3)\left[\lambda^2-3\lambda-4\right]+\lambda-4=(\lambda+3)(\lambda-4)(\lambda+1)+1(\lambda-4)=$$

$$=\left[(\lambda+3)(\lambda+1)+1\right](\lambda-4)=\left(\lambda^2+4\lambda+4\right)(\lambda-4)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

ואז הערכים העצמיים הם: $-2,4$.
ב.
נמצא בסיס למרחב העצמי עבור $\lambda=4$.

ז"א יש למצוא בסיס למרחב האפס עבור המערכת $Ax=0$ כאשר $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}$.

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ואז הבסיס $B=\{(0,1,1)\}$.

נמצא בסיס למרחב העצמי עבור $\lambda=-2$.

ז"א יש למצוא בסיס למרחב האפס עבור המערכת $Ax=0$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$.

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ואז הבסיס $B=\{(1,1,0)\}$.

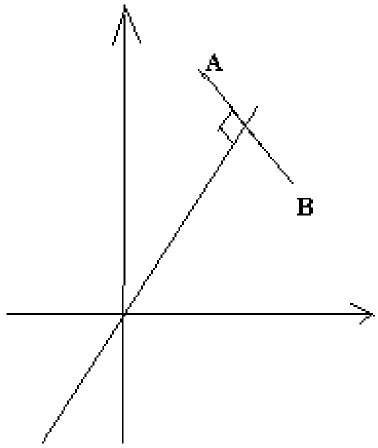
הקבוצה המקסימאלית היא $S=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$.
ג.
B לא ניתנת ללכסון מכיוון שבקבוצה S שבסעיף הקודם יש שני איברים ולא שלושה.

2. יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית אשר משקפת נקודות ביחס לישר $y=kx$ (כאשר $k\neq 0$).

א. הראה כי $v_1=(1,k), v_2=(-k,1)$ הם וקטורים עצמיים של T.

ב. הראה כי T ניתן-ללכסון, ומצא הצגה אלכסונית D כזו.

2.



הנקודה B היא שיקוף לנקודה A. שיפוע הישר AB הוא $-\frac{1}{k}$ ולכן משוואת הישר שעוברת שרך הנקודה הנקודה (a,b) היא $y-b=-\frac{1}{k}(x-a)\Rightarrow y=-\frac{1}{k}x+\frac{a}{k}+b$.

נמצא את נקודת החיתוך עם הישר $y=kx$. $kx=-\frac{1}{k}x+\frac{a}{k}+b\Rightarrow(k^2+1)x=a+bk\Rightarrow x=\frac{a+bk}{k^2+1}$

ולכן נקודת החיתוך היא $\left(\frac{a+bk}{k^2+1},\frac{(a+bk)k}{k^2+1}\right)$ שהיא בעצם נקודת האמצע של הקטע AB.

הנקודה B היא $\left(\frac{a+2bk-ak^2}{k^2+1},\frac{-b+2ak+bk^2}{k^2+1}\right)$.

ההעתקה הליניארית היא $T(a,b)=\left(\frac{a+2bk-ak^2}{k^2+1},\frac{-b+2ak+bk^2}{k^2+1}\right)$.

המטריצה המתאימה היא $[T]=\begin{pmatrix}\frac{-k^2+1}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1}\\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1}\end{pmatrix}$

נמצא את הערכים העצמיים

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1}\\ \frac{-2k}{k^2+1} & \lambda-\frac{k^2-1}{k^2+1}\end{pmatrix}\right|=\lambda^2-\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2-\left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2\Rightarrow\lambda^2=\frac{k^4-2k^2+1+4k^2}{(k^2+1)^2}\Rightarrow\lambda^2=\frac{(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2}\Rightarrow\lambda=\pm1$$

עבור $\lambda=1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & 1-\frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2k^2}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & \frac{2}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $(1,k)$ הוא פתרון ולכן וקטור עצמי.

עבור $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & -1-\frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & \frac{-2k^2}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $(-k,1)$ הוא פתרון ולכן וקטור עצמי.

3. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
   א. אם מטריצה A לכסינה, אז הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
   ב. לכל שתי מטריצות דומות יש אותם וקטורים עצמיים.

.3

.א

לא נכון. דוגמא נגדית מטריצת הזהות.

.ב

לא נכון.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ כאשר $$P=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ ו $$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

נשים לב ש $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

אבל לא וקטור עצמי של המטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ שדומה לה.

4. תהיי $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(A)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot A$. מצא את הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים של T.

.4

נמצא תחילה את המטריצה המתאימה להעתקה הליניארית

$$T\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & -2\end{pmatrix}$$

ואז

$[T]=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\2 & 0 & -2 & 0\\0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ נמצא את הערכים העצמיים

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\0 & \lambda-1 & 0 & 1\\-2 & 0 & \lambda+2 & 0\\0 & -2 & 0 & \lambda+2\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\0 & \lambda-1 & 0 & 1\\0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

שימו לב שיש לבדוק עבור $\lambda=1$ בנפרד.

יש שני ערכים עצמיים $\lambda=0,\lambda=-1$

אם $\lambda=0$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אם $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\0 & -2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

5. במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ (מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל 2) נתון הבסיס:
$P_1(x)=1+x, P_2(x)=1-x, P_3(x)=x+x^2$. T היא העתקה ליניארית המעתיקה את המרחב הנ"ל
לעצמו כך שמתקיים: $T(P_1(x))=1, T(P_2(x))=2+x, T(P_3(x))=x^2$.
הוכח ש $\lambda=1$ הוא ערך עצמי ומצא בסיס למרחב העצמי הנתון.

.5
נמצא את המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי

$$T(1)=\frac{1}{2}\left(T\left(P_1(x)+P_2(x)\right)\right)=1.5+0.5x, T(x)=\frac{1}{2}\left(T\left(P_1(x)-P_2(x)\right)\right)=-0.5-0.5x,$$

$$T\left(x^2\right)=T\left(P_3(x)\right)-\frac{1}{2}T\left(P_1(x)-P_2(x)\right)=x^2+0.5x+0.5$$

$$[T]=\begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את הערך העצמי

$\left|\begin{pmatrix} \lambda-1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & \lambda+0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|=0$ ולכן $\lambda=1$ הוא ערך עצמי. (מכיוון שביקשו להוכיח אין צורך לפתור
אלא רק להציב ולבדוק)

נחשב את הבסיס לווקטור העצמי כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן הווקטור העצמי הוא $(1,0,-1)$

שימו לב שאכן $T\left(1-x^2\right)=1-x^2$