

## פתרונות לתרגיל 7 באינפי 2 - מתמטיקאים

### שאלה 1

אורך העקום של  $f$  בקטע מקיים

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &\geq \int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2} dx = \int_0^1 |f'(x)| dx \geq \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \\ &= \left| \lim_{R \rightarrow 0^+} \int_R^1 f'(x) dx \right| = \left| \lim_{R \rightarrow 0^+} f(1) - f(R) \right| = \infty\end{aligned}$$

### שאלה 2

1.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3 + x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3 + x}} dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3 + x}} dx$$

את האינטגרל השמאלי ניתן להשוות עם

$$\frac{x}{\sqrt{x^3 + x}}$$

ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

כמו כן,

$$\frac{x}{\sqrt{x^3 + x}} = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$$

שאת זה אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי עם  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . היות ו  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  מתכנס. גם

האינטגרל השמאלי מתכנס. את האינטגרל הימני אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי ל  $\frac{1}{x^{1.5}}$  ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \arctan x}{\sqrt{x^3 + x}} = \frac{\pi}{2}$$

היות ו  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$  מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס.

.2

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}} dx$$

נציב  $t = -\ln x$  ולכן  $dt = -\frac{1}{x} dx$  נכלומר

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}} dx = - \int_{-\ln \frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{-\ln \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

זוה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

### שאלה 3

.1

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx$$

נבצע מבחן השוואה עם

$$\frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

קל לראות ש

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

היות ו  $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}} dx$  מתכנס אם ורק אם  $\alpha < 3$  אז גם האינטגרל שלנו מתכנס במצבים אלה.

.2

$$\int_0^1 |\ln(x)|^\alpha dx$$

עבור  $\alpha > 0$  נבצע השוואה עם  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} |\ln(x)|^\alpha = 0$$

היות ו  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס. עבור  $\alpha = 0$  ברור שהאינטגרל מתכנס. עבור  $a > 0$  נקבל שעדיין האינטגרל לא אמיתי, והפעם הבעיה ב 1. (בסביבת

0 הפונקציה חסומה). אפשר לכתוב את האינטגרל כ

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta} dx$$

כאשר  $\beta = -\alpha > 0$ . נתמקד בחלק הבעייתי

$$\int_a^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta} dx$$

כאשר  $a > 0$  נבצע השוואה עם  $\frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}$  ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|\ln(x)|^\beta}{|\ln(x)|^\beta} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

את האינטגרל הזה

$$\int_a^1 \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta} dx = \int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta} dx$$

קל לחשב, נציב  $t = -\ln x$  ולכן  $-dt = \frac{1}{x} dx$ .

$$\int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta} dx = - \int_{\ln a}^0 \frac{1}{t^\beta} dt = \int_0^{\ln a} \frac{1}{t^\beta} dt$$

האינטגרל הזה מתכנס כאשר  $\beta < 1$ . לסיכום האינטגרל המקורי מתכנס כאשר  $\alpha > -1$ .

3.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan(x)|^\alpha dx$$

נסתכל רק על החלק

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha(x) dx$$

היות והפונקציה זוגית, החלק השני יתנהג אותו דבר. אם  $\alpha > 0$  אז הבעיה היא בנקודה  $\frac{\pi}{2}$ . נשווה עם  $\frac{1}{\cos^\alpha x}$  ונראה בקלות האינטגרל מתכנס ומתבדר יחד עם

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^\alpha x} dx$$

כעת נשווה את  $-\frac{1}{\cos^\alpha x}$  עם  $(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})^\alpha$  ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right)^\alpha = \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right)^\alpha = \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1} \right)^\alpha = 1$$

היות ו  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}})^\alpha$  מתכנס אם ורק אם  $\alpha < 1$  גם האינטגרל שלנו יתכנס כאשר  $\alpha < 1$ . עבור  $\alpha = 0$  ברור שהאינטגרל מתכנס. נותר לבדוק עבור  $\alpha < 0$ . נכתוב את האינטגרל בתור

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\beta x}{\sin^\beta x} dx$$

כאשר  $\beta = -\alpha > 0$  וברור שהבעיה היא ב  $0$ . משיקולים דומים לקודם זה מתכנס אם ורק אם

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^\beta x} dx$$

מתכנס. בדומה לקודם נוכל להשוות ל  $\frac{1}{x^\beta}$  ונקבל שהאינטגרל מתכנס אם ורק אם  $-1 < \alpha < 1$ . לסיכום האינטגרל מתכנס אם ורק אם  $-1 < \alpha < 1$ .

#### שאלה 4

נשים לב כי

$$\int_a^\infty |f(x)f'(x)| dx \leq \int_a^\infty c|f(x)| dx$$

היות ו  $\int_a^\infty c|f(x)| dx$  מתכנס גם  $\int_a^\infty |f(x)f'(x)| dx$  מתכנס ולכן גם  $\int_a^\infty f(x)f'(x) dx$  מתכנס. כלומר קיים  $L \in \mathbb{R}$  כך ש

$$L = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)f'(x) dx$$

נציב  $t = f(x)$  ונקבל

$$L = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)f'(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{f(a)}^{f(R)} t dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(R)^2 - f(a)^2)$$

ולכן ברור כי  $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R)$  הוא מספר, כלומר הגבול קיים.

נסמן  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , אם  $a \neq 0$  אז אין סיכוי ש  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  יתכנס ולכן  $a = 0$

כנדרש.