פתרון תרגיל לעבודה עצמית 4

שאלה 1

מצא עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=xye^{x+y}+\sin\left(xy\right)+x$ את הנגזרות הבאות:

א. $f'_x\left(x,y\right)$ ב. $f'_y\left(x,y\right)$ ג. $f''_{xy}\left(x,y\right)$ ד. $f''_{xx}\left(x,y\right)$ ה. $f''_{yy}\left(x,y\right)$.

פתרון

א. $f'_x\left(x,y\right)=ye^{x+y}+xye^{x+y}+y\cos\left(xy\right)+1$.

ב. $f_y'\left(x,y\right)=xe^{x+y}+xye^{x+y}+x\cos\left(xy\right)$.

ג. $f_{xy}'\left(x,y\right)=e^{x+y}+xe^{x+y}+ye^{x+y}+xye^{x+y}+\cos\left(xy\right)-xy\sin\left(xy\right)$.

ד. $f''_{xx}\left(x,y\right)=2ye^{x+y}+xye^{x+y}-y^2\sin\left(xy\right)$.

ה. $f''_{yy}\left(x,y\right)=2xe^{x+y}+xye^{x+y}-x^2\sin\left(xy\right)$.

שאלה 2

מצא את המקסימום והמינימום המקומיים של הפונקציות הבאות:

א. $f(x,y)=-3x^2-3xy-y^2+4x-2$ ב. $f(x,y)=\ln\left|x+y\right|+2x^2-y^2$.

פתרון

א. נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות

$$f(x,y)=-3x^2-3xy-y^2+4x-2$$

$$f_x'\left(x,y\right)=-6x-3y+4$$

$$f_y'\left(x,y\right)=-3x-2y$$

יש לפתור את מערכת המשוואות

$\begin{cases}-6x-3y+4=0\\-3x-2y=0\end{cases}\Leftarrow x=\frac{8}{3},y=-4$ הנקודה $\left(-4,\frac{8}{3}\right)$ היא נקודה קריטית.

נשתמש במבחן הנגזרות החלקיות מסדר שני

תהיי f פונקציה של שני משתנים, שיש לה נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני בעיגול שמרכזו בנקודה קריטית $\left(x_0,y_0\right)$ של f . נסמן - $D=f_{xx}\left(x_0,y_0\right)f_{yy}\left(x_0,y_0\right)-f_{xy}^2\left(x_0,y_0\right)$.

א. אם $D>0$ ו $f_{xx}\left(x_0,y_0\right)>0$, אז ל f יש מינימום מקומי ב $\left(x_0,y_0\right)$.

ב. אם $D>0$ ו $f_{xx}\left(x_0,y_0\right)<0$, אז ל f יש מקסימום מקומי ב $\left(x_0,y_0\right)$.

ג. אם $D<0$ אז ל f יש נקודת אוכף ב $\left(x_0,y_0\right)$.

ד. אם $D=0$ מבחן זה אינו מספק מידע על $\left(x_0,y_0\right)$.

$f_{xy}''\left(x,y\right)=-3,\ f_{xx}''\left(x,y\right)=-6,\ f_{yy}''\left(x,y\right)=-2$ סה"כ נקבל ש $D=3>0$ ו

$f_{xx}''\left(x,y\right)=-6<0$ ולכן $\left(-4,\frac{8}{3}\right)$ היא נקודת מקסימום.

ב. נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות

$$f(x,y)=\ln(x+y)+2x^2-y^2$$

$$f_x'(x,y)=\frac{1}{x+y}+4x$$

$$f_y'(x,y)=\frac{1}{x+y}-2y$$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}+4x=0\\ \frac{1}{x+y}-2y=0\end{cases}$$

$$y=-2x$$

$$\frac{1}{-x}+4x=0$$

$$x_1=\frac{1}{2};y_1=-1$$

$$x_2=-\frac{1}{2};y_2=1$$

הנקודות הקריטיות הן $\left(-\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)$

נשתמש במבחן הנגזרות החלקיות מסדר שני

תהיי f פונקציה של שני משתנים, שיש לה נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני בעיגול שמרכזו בנקודה קריטית (x_0,y_0) של f. נסמן - $D=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)$.

א. אם $D>0$ ו $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, אז ל f יש מינימום מקומי ב (x_0,y_0).

ב. אם $D>0$ ו $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, אז ל f יש מקסימום מקומי ב (x_0,y_0).

ג. אם $D<0$ אז ל f יש נקודת אוכף ב (x_0,y_0).

ד. אם $D=0$ מבחן זה אינו מספק מידע על (x_0,y_0).

$$f_x'(x,y)=\frac{1}{x+y}+4x \Rightarrow f_{xy}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2} \Rightarrow f_{xx}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}+4$$

$$f_y'(x,y)=\frac{1}{x+y}-2y \Rightarrow f_{yy}''=-\frac{1}{(x+y)^2}-2$$

נבדוק עבור הנקודה $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

$$f_{xx}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}+4\Rightarrow f_{xx}''\left(-\frac{1}{2},1\right)=0$$

$$f_{xy}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}\Rightarrow f_{xy}''\left(-\frac{1}{2},1\right)=-4$$

$$f_{yy}''=-\frac{1}{(x+y)^2}-2\Rightarrow f_{yy}''\left(-\frac{1}{2},1\right)=-6$$

$D=-16<0$ והנקודה היא נקודת אוכף.

נבדוק עבור הנקודה $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ נשים לב ש $f_{xx}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}+4\Rightarrow f_{xx}''\left(\frac{1}{2},-1\right)=0$

$f_{xy}''(x,y)=-\frac{1}{(x+y)^2}\Rightarrow f_{xy}''\left(\frac{1}{2},-1\right)=-4$ ואז נקבל ש $D=-16<0$.

סה"כ קיבלנו שהנקודות $\left(-\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)$ הן נקודות אוכף.

<u>שאלה 3</u>

מצא את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x,y)$ בתחום החסום והסגור D.

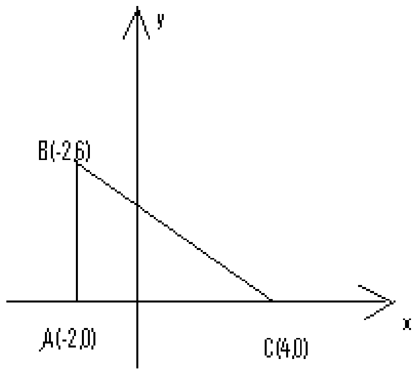
א. $f(x,y)=x^3-2xy+x^2+y^2+3x-2y;\ \ D:\ \Delta ABC;\ \ A(-2,0), B(-2,6), C(4,0)$.

ב. בתחום חסום וסגור ע"י הקווים $x=-2, x=0, y=2, y=0$ מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=6xy+3y^2-2x^3+10$

<u>פתרון</u>

א.

נשים לב שהתחום הסגור הוא התחום הבא:



נמצא נקודות קריטיות בתוך התחום

$f(x,y)=x^3-2xy+x^2+y^2+3x-2y$

$f_x'(x,y)=3x^2-2y+2x+3$ נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases}3x^2-2y+2x+3=0\\-2x+2y-2=0\end{cases}$

$f_y'(x,y)=-2x+2y-2$

נקבל מהמשוואה השנייה ש $2x-2y=-2$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל ש $3x^2+1=0$.

למשוואה אין פתרון ולכן אין נקודות קריטיות בתוך התחום.

נשאר לבדוק על השפה.

הקטע AC : $y=0;-2\le x\le 4$.

נציב בפונקציה $y=0$ ונקבל $f(x,0)=x^3+x^2+3x$.

נגזור ונשווה לאפס $3x^2+2x+3=0$ למשוואה אין פתרון והנקודות הקריטיות הן: $(-2,0),(4,0)$.

הקטע AB : $x=-2;0\le y\le 6$ נציב בפונקציה $x=-2$ ונקבל $f(-2,y)=y^2+2y-10$ נגזור ונשווה לאפס ונקבל $y=-1$ שהוא לא בתחום ולכן הנקודות הקריטיות הן $(-2,0),(6,0)$.

הקטע BC: $y=-x+4; -2\le x\le 4$ נציב בפונקציה $y=-x+4$ ונקבל

$$f(x,-x+4)=x^3-2x(-x+4)+x^2+(-x+4)^2+3x-2(-x+4)$$
$$f(x,-x+4)=x^3+2x^2-8x+x^2+x^2-8x+16+3x+2x-8$$
$$f(x,-x+4)=x^3+4x^2-11x+8$$

נגזור נשווה לאפס $3x^2+8x-11=0$ ואז $x_1=1, x_2=-3\frac{2}{3}$

הנקודה $x=-3\frac{2}{3}$ מחוץ לתחום ולכן הנקודות הקריטיות הן

$(1,3),(-2,6),(4,0)$

סה"כ הנקודות שיש לבדוק הן

$(1,3),(-2,6),(4,0),(-2,0)$

$f(1,3)=2,\ f(-2,6)=38,\ f(4,0)=92,\ f(-2,0)=-10$

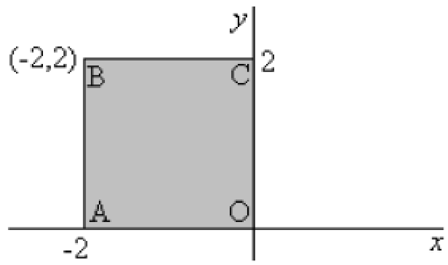
המקסימום המוחלט הוא 92 והוא מתקבל בנקודה $(4,0)$.

המינימום המוחלט הוא -10 והוא מתקבל בנקודה $(-2,0)$.

ב.

$$z'_x=6y-6x^2;\ z'_x=0\to 6y-6x^2=0\to y=x^2$$
$$z'_y=6x+6y;\quad z'_y=0\to 6x+6y=0\to y=-x$$
$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}\Rightarrow x^2=-x\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0, y=0\vee x=-1, y=1\Rightarrow P_1(0,0), P_2(-1,1)$$
$$OA(y=0;-2<x<0): z=-2x^3+10; z'=-4x^2; z'=0\Rightarrow x=0\to O(0,0)$$
$$OC(x=0;0<y<2): z=3y^2+10; z'=6y; z'=0\Rightarrow y=0\to O(0,0)$$
$$AB(x=-2;0<y<2): z=-12y+3y^2+26; z'=6y-12; z'=0\Rightarrow y=2\to B(-2,2)$$
$$BC(y=2;-2<x<0): z=12x-2x^3+22; z'=12-6x^2; z'=0\Rightarrow x=-\sqrt{2}\to Q(-\sqrt{2},2)$$

P	(0,0)	(-2,0)	(-2,2)	(0,2)	$(-\sqrt{2},2)$	(-1,1)
Z(P)	10	26	14	22	10.69	9
		Max				Min



<u>שאלה 4</u>

על המישור $z = 10 + 4x + 6y$ מצא את הנקודה הגבוהה ביותר ונמוכה ביותר מעל האליפסה $2x^2 + 3y^2 = 1$.

<u>פתרון</u>

נמצא את נקודות הקיצון על המישור $z = 10 + 4x + 6y$ תחת האילוץ $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$.

פונקציית לגרנז' היא:

$$L(x, y, \lambda) = 10 + 4x + 6y + \lambda\left(2x^2 + 3y^2 - 1\right)$$

נמצא נקודות קריטיות

$L_x' = 4 + 4\lambda x$

$L_y' = 6 + 6\lambda y$ יש לפתור את מערכת המשוואות:

$L_\lambda' = 2x^2 + 3y^2 - 1$

$$(1)\ 4 + 4\lambda x = 0$$

$$(2)\ 6 + 6\lambda y = 0$$

$$(3)\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$$

ממשוואה 1 נקבל $\lambda x = -1$ ממשוואה 2 נקבל $\lambda y = -1$ ולכן $\lambda x = \lambda y$ ומכיוון ש $\lambda \neq 0$ נקבל ש $y = x$.

ממשוואה 3 נקבל $5x^2 = 1$ ואז הנקודות הקריטיות הן: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 10 + \frac{10}{\sqrt{5}} = 10 + 2\sqrt{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 10 - \frac{10}{\sqrt{5}} = 10 - 2\sqrt{5}$$

ולכן $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 10 + 2\sqrt{5}\right)$ מקסימום לוקלי באילוץ ו $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 10 - 2\sqrt{5}\right)$ מינימום לוקלי באילוץ.