תרגול 4-אושרית

יחסים מחלקות שקילות וקבוצת מנה, יחסי סדר,דיאגרמות הסה ואיברים מיוחדים

יחסים כתת"ק של זוגות סדורים:

הגדרה: יהיו A,B קב', $R\subseteq A\times B$ יקרא **יחס מ-A ל-B**. כלומר - יחס הוא תת"ק של המכפלה הקרטזית $A\times B$.

דוג': $B=\{0,2,6\}$ $A=\{1,2,3\}$ $R=\{(1,2),(1,6),(2,2),(2,6),(3,6)\}$ הנו יחס.

הערה: יחס לא חייב להיות חוקיות עם <u>פשוט</u> תת"ק של $A\times B$.

סימון: אם $(a,b)\in R$ נהוג לסמן - aRb.

הערה: דוג' ליחסים טריוויאליים - $\emptyset$ ← מייצג את היחס הריק. $A\times B$ ← יחס המלא - כולם מתייחסים לכולם.

תכונות של יחסים על קב׳:

הגד׳: יחס R על קב׳ A פירושו $R\subseteq A\times A$.

סוגי יחסים: תהי קב׳ A ויחס R עליה- אז:

1. R נקרא **רפלקסיבי** - אם כל איבר מקיים את היחס עם עצמו,

פורמלית: לכל $a\in A$ $(a,a)\in R$.

2. R נקרא **סימטרי** - לכל $a,b\in A$ כך ש- $aRb \Rightarrow bRa$.

3. R נקרא **טרנזיטיבי** - לכל $a,b,c\in A$ כך ש- $aRb\wedge bRc \Rightarrow aRc$.

4. R נקרא **אנטי-סימטרי (חלש)** - לכל $a,b\in A$ כך ש- $aRb\wedge bRa \Rightarrow a=b$.

יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי נקרא יחס שקילות.

תרגיל: מצאו יחסים על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ עם התכונות הבאות:

1 רפלקסיבי   3 אנטי סימטרי   5 סימטרי + אנטי סימטרי   7 רפלקסיבי סימטרי ולא טרנזיטיבי

2 סימטרי   4 טרנזיטיבי   6 טרנזיטיבי וסימטרי   8 רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי

תרגיל: מצאו יחסים על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ עם התכונות הבאות:

1. רפלקסיבי
2. סימטרי
3. אנטי סימטרי
4. טרנזיטיבי
5. סימטרי + אנטי סימטרי
6. טרנזיטיבי וסימטרי
7. רפלקסיבי סימטרי ולא טרנזיטיבי
8. רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי

פתרון:

אפשר להוסיף עוד איברים. אין חובה.

1. רפלקסיבי ← צריך שכל איברי הקבוצה A יופיעו עם עצמם. $\{(1,1),(2,2),(3,3),\dots\}$ וכו'
2. סימטרי ← $\emptyset$ מקיים באופן ריק כי אין אף זוג ב-R. $\{(1,2),(2,1)\}$ וכו'
3. אנטי סימטרי ← $\emptyset$ מקיים באופן ריק כי אין אף זוג ב-R. $\{(1,1)\}$ וכו'
4. טרנזיטיבי ← $\emptyset$ מקיים באופן ריק כי אין אף זוג ב-R. $\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ וכו'
5. סימטרי + אנטי סימטרי ← $\emptyset$ מקיים באופן ריק. $\{(1,1)\}$ וכו'
6. טרנזיטיבי + סימטרי ← $\emptyset$ $\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$ וכו'.
7. רפלקסיבי, סימטרי + לא טרנזיטיבי ← **חשוב!**

$$\{\overbrace{\overbrace{(1,1),(2,2),(3,3)}^{\text{רפלקסיבי}},(3,1),(1,3),(3,2),(2,3)}^{\text{סימטרי}}\}$$

לא טרנזיטיבי ← $(1,3),(3,2)\in R$ אבל $(1,2)\notin R$.

8. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ← $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

עכשיו-נלמד על מושג מאוד מיוחד:

הגד: תהא A קב'. חלוקה של A היא חלוקה של A לקב' זרות. באופן פורמלי - קיימות ת"ק $\{A_i\}_{i\in I}$ כך ש:

1. $A_i \neq \phi \quad \forall i\in I$ כל הקב' בחלוקה שונות מקב' ריקה.
2. $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ האיחוד של הקב' הוא הקב' כולה.
3. $A_i\cap A_j=\phi \quad \forall i\neq j$ החיתוך בין כל זוג קב' שונות - ריק. = זרות בזוגות.

דוג: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A_3=\{6\}$ $\quad A_2=\{2,4,5\}$ $\quad A_1=\{1,3\}$

תזכורת: חלוקה של קב' A מגדירה יחס שקילות על A.

תרגיל:

נגדיר על $\mathbb{R}$ (ממשיים) 4 יחסים Q,R,S,T באופן הבא- לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

1. $xQy \iff x-y=17$
2. $xRy \iff x-y\in \mathbb{N}\cup\{0\}$
3. $xSy \iff x-y\in 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$
4. $xTy \iff x-y\in \mathbb{Z}$

תשובה:

① Q לא יחס - קל לראות שלא רפלקסיבי: שהרי, לכל $x\in\mathbb{R}$ $x-x=0\notin\mathbb{N}$ ולכן - $(x,x)\notin R$.

② R לא יחס - נימוק כי לא סימטרי: **דוג':** $(3,2)\in R$ $3-\underset{\underset{\mathbb{N}\cup\{0\}}{\uparrow}}{2=1}$ אבל $(2,3)\notin R$ כי $2-3=\underset{\underset{\mathbb{N}\cup\{0\}}{\notin}}{-1}$.

③ S לא יחס - נימוק כי לא טרנזיטיבי. **דוג':** $\underbrace{2S6}_{2-6=4\in 2\mathbb{Z}}\wedge\underbrace{6S3}_{6-3=3\in 3\mathbb{Z}}$ ✓ אבל $2\not S3$ כי $2-3=\underset{\underset{2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}}{\notin}}{-1}$

④ כן יחס. 1. רפלקסיביות - יהי $x\in\mathbb{R}$ **צ"ל:** xTx נכון כי $x-x=0\in\mathbb{Z}$ ✓.

2. סימטריות - יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש- xTy **צ"ל:** yTx.

אז $xTy \Rightarrow c=x-y\in\mathbb{Z}$ (נסמן ♡) כי $y-x=-c\in\mathbb{Z} \Rightarrow yTx$.

3. טרנזיטיביות - יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$ כך ש- $xTy\wedge yTz$ **צ"ל:** xTz.

$xTy \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$ $yTz\Rightarrow y-z\in\mathbb{Z}$. (נסמן ♡) כי $x-z=(\underset{\underset{\mathbb{Z}}{\uparrow}}{x-y})+(\underset{\underset{\mathbb{Z}}{\uparrow}}{y-z})\in\mathbb{Z}$ ✓ $\mathbb{Z}$ סגורה לחיבור

$\Rightarrow xTz \Rightarrow T$ טרנזיטיבי!

סה"כ - T יחס.

מחלקות שקילות וקב' מנה:

הגד': יהי R יחס על A אזי:

1. לכל $x\in A$ מוגדרת **מחלקת השקילות** של x להיות-

$$[x]_R := \{y\in A \mid (x,y)\in R\}$$

2. **קב' המנה** מוגדרת- $A/R := \{[x]_R \mid x\in A\}$ = קב' כל מחלקות השקילות.

דוג': $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A_1=\{1,3\}$ $A_2=\{2,4,5\}$ $A_3=\{6\}$

$xRy \iff \exists 1\le i\le 3 : x,y\in A_i$

מצאו- ① מחלקות השקילות ② קב' המנה.

פתרון:

① A_1, A_2, A_3 ② $A/R=\{A_1,A_2,A_3\}$

משפט: תהי R יחס שקילות על A אזי:

1. לכל $x,y\in A$ מתקיים $[x]_R=[y]_R$ או $[x]_R\cap[y]_R=\emptyset$ במילים - מחלקות שקילות שונות - זרות.
2. $A=\bigcup\limits_{[x]_R\in A/R}[x]_R$ במילים - איחוד מחלקות השקילות $=A$.

אוסף כל מחלקות השקילות

משפט: כל יחס שקילות מגדיר חלוקה וכל חלוקה מגדירה יחס שקילות

תרגיל: כמה יחסי שקילות שונים יש על $A=\{1,2,3\}$

תרגיל: כמה יחסי שקילות שונים יש על $A=\{1,2,3\}$

פתרון: ניעזר במשפט נ.ע.ז - שכל חלוקה מגדירה יח"ש ולכן מספיק לנו - לספור כמה חלוקות יש ל-A.

(1) $\{1,2,3\}$ (2) $\{1\}\ \{2,3\}$ (3) $\{2\}\ \{1,3\}$ (4) $\{3\},\{1,2\}$ (5) $\{1\},\{2\},\{3\}$ לכן - יש 5 יח"ש על A.

תרגיל:

על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ נגדיר יחס $\sim$ לפי נה שלכל $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ מחלקת השקילות של $(1,0)$

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \longleftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ הוכח שזהו יחס שקילות. מה מחלקה גיאומטרית

ומה מחלקה גיאומטרית קב' המנה?

פתרון:

1. **רפלקסיביות**- יהי $(x,x)\in\mathbb{R}^2$ ונרצה להראות כי $(x,x)\in R$ אכן מתקיים כי - $x^2+x^2=x^2+x^2$ ✓.
2. **סימטריות**- יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ וצ"ל: $(x_2,y_2)R(x_1,y_1)$
3. **טרנזיטיביות**- יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)R(x_3,y_3)$ צ"ל: $(x_1,y_1)R(x_3,y_3)$

$$x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2 \qquad x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$$

לפי טרנזיטיביות השוויון $\Leftarrow x_1^2+y_1^2=x_3^2+y_3^2 \Leftarrow (x_1,y_1)R(x_3,y_3)$

ניתוח גיאומטרי של מחלקות השקילות וקבוצת המנה:

כעת- נראה את מחלקת השקילות של $(0,1)$ כל הנק' של מעגל היחידה.

$$[(0,1)]_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=0^2+1^2\}=\{(x,y): x^2+y^2=1\}=$$

קב' המנה: היא אוסף המעגלים סביב הראשית עם כל הרדיוסים האפשריים.

... את כל הרדוסים האפשריים.

שאלת ממבחן:

א. תהי A קב' לא ריקה ותהי $\{R_i\}_{i\in I}$ משפ' של יחסי שקילות על A. הוכיחו כי - החיתוך הכללי $R=\bigcap_{i\in I} R_i$ הוא יחש״ על A.

ב. נסמן - $R_n=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n \mid (x-y)\}$

3 תהי - $R=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ 1 R_1 2 R_2 4. קב' המנה - $\mathbb{Z}/R$, $\mathbb{Z}/R_1$, $\mathbb{Z}/R_2$

פתרון:

פתרון:

ג) 1. רפלקסיביות: יהי $x\in A$ צ"ל: כי xRx כלומר - צ"ל $(x,x)\in\bigcap_{i\in I}R_i$

לכל $i\in I$, R_i יחס רפלקסיבי ולכן - $(x,x)\in R_i \xrightarrow[\text{הגדרת חיתוך}]{\text{לפי}} (x,x)\in\bigcap_{i\in I}R_i$.

2. סימטריות: יהיו $x,y\in A$ כך ש- $(x,y)\in R$. צ"ל: $(y,x)\in R$.

$(x,y)\in R \xrightarrow{\text{הגדרת } R} (x,y)\in\bigcap_{i\in I}R_i \xrightarrow[\text{חיתוך}]{\text{הג'}} \forall i\in I: (x,y)\in R_i \xrightarrow[\text{ולפיכך סימטרי}]{R_i \text{ יחס}} \forall i\in I: (y,x)\in R_i \xrightarrow[\text{חיתוך}]{\text{הג'}} (y,x)\in\overbrace{\bigcap_{i\in I}R_i}^{R}$

3. טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ כך ש- $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$. צ"ל: $(x,z)\in R$.

$(x,y)\in\bigcap_{i\in I}R_i$ $\qquad$ $(y,z)\in\bigcap_{i\in I}R_i$

$(x,y)\in R_i$ לכל $i\in I$ $\qquad$ $(y,z)\in R_i$ לכל $i\in I$

R_i יחס ולפיכך טרנזיטיבי

$(x,z)\in R_i$ לכל $i\in I$

$(x,z)\in\overbrace{\bigcap_{i\in I}R_i}^{R}$

המשך פתרון:

ד. ① R_1 ← $R_1 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 1|(x-y)\} \overset{\text{כי}}{=} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

כל זוג מס' שלמים ההפרש שלהם מתחלק ב-1.

② R_2 ← $R_2 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 2|(x-y)\}$

כלומר - אוסף כל הזוגות שההפרש ביניהם זוגי - זה קורה כאשר 2 המס' זוגיים / כאשר 2 המס' אי-זוגיים

③ R ← $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n|(x-y)\}$

אוסף כל הזוגות שההפרש שלהם מתחלק בכל מס' טבעי. רק המס' 0 מתחלק בכל המס' הטבעיים

R מכיל את כל הזוגות שההפרש ביניהם 0 כלומר $\Rightarrow \{(z,z) \mid z\in\mathbb{Z}\}$

④ עכשיו - ננתח את קב' המנה.

$\mathbb{Z}/R_1$ ← ב-$\mathbb{Z}/R_1$ יש רק מחלקת שקילות 1 שמכילה את כל האיברים השלמים

$\mathbb{Z}/R_2$ ← ב-$\mathbb{Z}/R_2$ יש 2 מחלקות שקילות R [מחלקת הזוגיים] ו[מחלקת האי-זוגיים]

$\mathbb{Z}/R$ ← אוסף כל הקב' המכילות איבר שלם יחיד

$\mathbb{Z}/R = \{[z]_R : z\in\mathbb{Z}\}$

בהצלחה!!!