הגדרה

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$.
הפנים של A, שמסומן $\mathring{A}$ מוגדר כך:

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ is open}}} U$$

תכונות

1. $\mathring{A} \subseteq A$
2. $\mathring{A}$ פתוחה
3. אם $U \subseteq A$ פתוחה, אז $U \subseteq \mathring{A}$(כלומר $\mathring{A}$ הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת בA)

שלושת התכונות הללו מאפיינות את $\mathring{A}$.
ע"י מעבר למשלימים:

$$\mathring{A} = \left(\overline{(A^c)}\right)^c$$

הוכחה: תרגיל

הגדרה

יהי X מ"ט, $A \subseteq X$.
A יקרא צפוף בX אם $\overline{A} = X$.
כלומר A צפופה בX אם"ם כל קבוצה פתוחה לא ריקה חותכת את A.

X מ"ט, $A \subseteq B \subseteq X$.

- ניתן להביט בסגור של A בX אותו נסמן כעת $\overline{A}^X$
- ניתן להביט בסגור של A בB אותו נסמן כעת $\overline{A}^B$

מה הקשר בין $\overline{A}^X$ ל$\overline{A}^B$?

$$\overline{A}^B = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \subseteq B \\ S \text{ is close in } B}} S = \bigcap_{\substack{Q \text{ is cloes in } X \\ A \subseteq Q}} = \left(\bigcap_{\substack{Q \text{ is close in } X \\ A \subseteq Q}} Q \right) \cap B = \overline{A}^X \cap B$$

(בחיתוך השני, לכאורה היינו צריכים לכתוב $A \subseteq Q \cap B$, אולם $A \subseteq Q \cap B$ אם"ם $A \subseteq Q$)

דוגמה

$$X=\mathbb{R} \qquad B=(0,1) \qquad A=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{A}^X=\left[0,\frac{1}{2}\right] \qquad \overline{A}^B=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

עוד דוגמה

$$\begin{array}{ccccc} A & \subseteq & B & \subseteq & X \\ (0,1)\cap\mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\mathring{A}^X=\emptyset \qquad \mathring{A}^B=A$$

הערה

A פתוחה אס"ם $A=\mathring{A}$

(דומה לטענה בשבוע שעבר שA סגורה אס"ם $\overline{A}=A$)

טענה

$$\mathring{A}^B\supseteq\mathring{A}^X$$

הוכחה

אם $U\subseteq A$ פתוחה בX, אז ודאי U פתוחה בB. לכן האוסף המשותף באיחוד המגדיר את $\mathring{A}^B$ מוכל באוסף המשותך באיחוד המגידר את $\mathring{A}^X$.

טענה

$$A\subseteq B\subseteq X$$

אזי A צפופה בB אס"ם $\overline{A}^X\supseteq B$

הוכחה

A צפופה ב-B אס"ם $\overline{A}^B = B$, אס"ם $\overline{A}^X \cap B = B$, אס"ם $B \subseteq \overline{A}^X$.

הגדרה

כיסוי פתוח של X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות ב-X כך ש-$X = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$

משפט

יהיו X, Y מ"ט, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, $f: X \to Y$ פונקציה. אזי f רציפה אס"ם $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \to Y$ רציפה לכל $\alpha \in I$.

פתרון

- $\Leftarrow$ אם f רציפה אז $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל α.
- $\Rightarrow$ נניח $f|_{U_\alpha}$ רציף לכל α. נראה ש-f רציף.
  תהי $U \subseteq Y$ פתוחה, צ"ל $f^{-1}(U)$ פתוחה. מתקיים:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in I} \left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(U)$$

כיוון ש-$f|_{U_\alpha}$ רציפה, $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה ב-U_α. אולם U_α פתוחה ב-X, ולכן $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה גם ב-X, ולכן האיחוד $\bigcup\limits_{\alpha\in I} f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה ב-X.

משפט

נניח $S_1, \dots S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות ב-X כך ש-$X = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$.
$f: X \to Y$ רציפה אס"ם $f|_{S_i}: S_i \to Y$ רציפה לכל $1 \le i \le n$

הוכחה

כמו המשפט הקודם, שכן התנאי שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה שקול לתנאי שקבוצה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

הגדרה

מ"ט X נקרא <u>קשיר</u> אם לא קיימות $U, V \subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש-$X = U \cup V$.

הגדרות שקולות

- X קשיר אס"ם לא קיימות קבוצות K, L סגורות זרות ולא ריקות כך ש-$X = K \cup L$
- X קשיר אס"ם לא קיימת $\emptyset \ne A \ne X$ כך ש-A פתוחה וגם סגורה.

הגדרה(לעת עתה)

נאמר שמ"ט מקיים את תכונת ערך הביניים אם לכל פונקציה רציפה $f:X\to\mathbb{R}$ ולכל $a,b\in X$, אם $f(a)<t<f(b)$ אז יש $c\in X$ כך ש$f(c)=t$.

דוגמה

$\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ערך הביניים.

משפט

X מקיים את תכונת ערך הביניים אם"ם X קשיר.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח X לא מקיים את תכונת ערך הביניים. כלומר קיימת $f:X\to\mathbb{R}$ וקיימים $a,b\in X$ וקיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש$f(a)<t<f(b)$ ולכל $x\in X$, $f(x)\neq t$. נגדיר $U=f^{-1}((t,\infty))$, $V=f^{-1}((-\infty,t))$. אזי U,V פתוחות לא ריקות: כי $b\in U$, $a\in V$ זרות(כי $(-\infty,t)$,(t,∞) זרות) ואיחודן כל X, כי הנחנו שלכל $x\in X$ $f(x)\neq t$ $\Leftarrow$ X לא קשיר.

$\Rightarrow$ נניח X לא קשיר. יהיו U,V פתוחות זרות לא ריקות כך ש$X=U\cup V$.
נגדיר $f:X\to\mathbb{R}$ ע"י

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in U\\ 1 & x\in V\end{cases}$$

f רציפה מהמשפט על "צמצום פוקנציה לכיסוי פתוח". מכאן שX לא מקיים את תכונת ערך הביניים.

דוגמה

$\mathbb{Q}$ לא קשיר
דוגמה לU,V:

$$U=\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cap\mathbb{Q}\qquad V=\left(\sqrt{2},\infty\right)\cap\mathbb{Q}$$

משפט

$\mathbb{R}$ קשיר

הוכחה

השקילות שהוכחנו קודם +משפט ערך הביניים משנה א'

טענה

X קשיר אס"ם לא קיימת פונקציה רציפה מX על מרחב דיסקרטי בין שתי נקודות.

הוכחה

זהה לשקילות שהוכחנו קודם.

הערה

הסיבה שקודם הוכחנו שקילות שבה מופיעים העתקים ל$\mathbb{R}$ היא רק כדי לקשר למשפט ערך הביניים משנה א'.

משפט

יהיו X,Y מ"ט, X קשיר, $f:X\to Y$ רציפה ועל Y. אזי Y קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה Y לא קשיר. כלומר קיימות $U,V\subseteq Y$ פתוחות זרות לא ריקות כך ש$U\cup V=Y$. $f^{-1}(U),f^{-1}(V)\subseteq X$, אזי הן פתוחות(כי f רציפה), זרות(כי U,V זרות), לא ריקות(כי U,V לא ריקות וf על), וכן $f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=X$, כי

$$f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cup V)=f^{-1}(Y)=X$$

סתירה לקשירות X.

נקבל כמסקנה משפט

יהיו X,Y מ"ט, X קשיר, $f:X\to Y$ רציפה. אזי $f(X)$ מרחב קשיר.

הוכחה

ע"י צמצום הטווח נקבל פונקציה $f:X\to f(X)$, והיא גם על.

במילים: תמונה רציפה של מרחב קשיר היא מרחב קשיר.

סיפור

נניח שאנו מעוניינים להראות שX קשיר, והצלחנו רק להראות שאיזהשהם תתי מרחבים של X הם קשירים. מתי נוכל להסיק מכך שX כולו קשיר?

למה קטנה

יהי X מ"ט, U,V קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות כך ש$U\cup V=X$, ונניח $A\subseteq X$ תת מרחב קשיר. אזי $A\subseteq U$ או או $A\subseteq V$

הוכחה

נניח בשלילה שלא, אזי $A \cap U \neq \emptyset$ וגם $A \cap V \neq \emptyset$. אזי הזוג $A \cap U$ וגם $A \cap V$ סותרים את קשירות A.

(אלה שתי קבוצות בA פתוחות בA זרות ולא ריקות שאיחודן A)

טענה 1

יהי X מ"ט, אזי X קשיר אם"ם לכל $a, b \in X$ יש תת מרחב קשיר A כך ש$a, b \in A$.

הוכחה

$\Rightarrow$ נניח בשלילה שX לא קשיר. אזי יש U, V פתוחות זרות לא ריקות כך ש$U \cup V =$ X. ניקח $a \in U, b \in V$. מההנחה יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש$a, b \in A$. מצד שני מהלמה $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$ - סתירה.

$\Leftarrow$ נניח X קשיר אזי לכל a, b ניקח $A = X$.

טענה 2

אם $A, B \subseteq X$, A, B קשירים, $A \cap B \neq \emptyset$ אזי $A \cup B$ קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה $A \cup B$ לא קשיר. אזי יש שתי קבוצות פתוחות ב$A \cup B$ זרות ולא ריקות כך ש$U \cup V = A \cup B$. אזי מהלמה עבור $A \cup B$ מתקיים $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$, ובאותו אופן $B \subseteq U$ או $B \subseteq V$.

האם ייתכן ש$A \subseteq U$ וגם $B \subseteq U$? לא! כי את $A \cup B \subseteq U \subsetneq A \cup B$. מכאן בה"כ $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ - סתירה לכך ש$A \cap B \neq \emptyset$.

משפט

יהי X מ"ט המקיים את התכונה הבאה: לכל $a, b \in X$ יש אוסף סופי $A_1, \ldots A_n$ של תתי מרחבים קשירים של X כך ש

$$a \in A_1 \qquad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, \ldots A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset \qquad b \in A_n$$

אזי X קשיר.

הוכחה

לפי הטענה הקודמת, $A_1 \cup A_2$ קשיר, ולכן גם $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קשיר, וכן הלאה. בסופו של דבר נקבל ש$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ קשיר. מתקיים: $a, b \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ לכן מהטענה הראשונה X קשיר.

מסקנה

אם X מ"ט, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של תתי מרחבים קשירים כך ש

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = X \qquad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

אזי X קשיר.

הוכחה

נשתמש בטענה הקודמת.

יהיו $a,b\in X$. יש α כך ש$a\in A_\alpha$. יש β כך ש$b\in A_\beta$. $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$ (כי החיתוך לא ריק) מכאן שמתקיים התנאי של הטענה המקורית עם השרשרת A_α, A_β.

משפט

יהי X מ"ט, $A\subseteq X$ קבוצה צפופה שהיא תת מרחב קשיר. אזי X קשיר.

הוכחה

נניח בשלילה שX לא קשיר. אזי יש U,V פתוחות זרות ולא ריקות כך ש$U\cup V=X$. נביט ב$U\cap A, V\cap A$. הן פתוחות בA, זרות, איחודן A. שתיהן לא ריקות כי A צפוף.

משפט

הקטעים למיניהם ב$\mathbb{R}$ הם כולם קשירים

למשל

$$(-\infty,b] \qquad (a,\infty) \qquad (a,b] \qquad [a,b)$$

הוכחה

כבר הוכחנו ש$(-\infty,\infty)$ קשיר. $(-\infty,\infty)$ הומאומורפי לכל הקטעים הפתוחים למיניהם, לכן גם אלה קשירים.

מדוע $[a,b)$ קשיר? נביט ב$\underbrace{[a,b)}_{B}\subseteq\underbrace{(a,b)}_{A}$.

$$A\subseteq B\subseteq\mathbb{R} \qquad \overline{A}^{\mathbb{R}}\supseteq B$$

A קשירה וA צפופה בB, לכן B קשיר.

טענה

$[a,b)\,,(c,d)$ לא הומאומורפיזם.

הוכחה

נניח בשלילה שיש הומאומורפיזם

$$h:[a,b)\to(c,d)$$

כלומר h רציפה, וקיימת g רציפה $g:(c,d)\to[a,b)$ כך ש$g\circ f=\mathrm{Id}$ $\quad$ $f\circ g=\mathrm{Id}$.

רעיון טופולוגי להמשך

- עבור $(*,*]$, יש בדיוק נקודה אחת שאם זורקים זה נשאר קשיר
- עבור $(*,*)$, אין אף נקודה שאם זורקים זה נשאר קשיר
- עבור $[*,*]$, יש בדיוק שתי נקודות שאם זורקים זה נשאר קשיר

בגלל ההבדר הטופולוגי הזה הקטעים לא הומאומורפיזם.