פונקציה f המוגדרת בסביבה של נק' x ב$\mathbb{R}^k$, $B(x,r)$.
u וקטור יחידה נתון.
$t \in \mathbb{R}$, $x + tu$
$|t| < r$, $\|(x+tu) - x = \| = \|tu\| = |t| < r$
$|t| < r$, $\boxed{F(t) = f(x+tu)}$
x, u נתונים, רק t משתנה.

$$\mathbb{R}^k \ni y \neq 0$$

$$u = \frac{1}{\|y\|} y$$

$$\|u\| = \frac{1}{\|y\|} \|y\| = 1$$

אם F גזירה בנקודה $t = 0$, נאמר שהנגזרת הכיוונית של f בנקודה x קיימת, וערכה הוא $F'(0)$: $F'(0) \doteqdot D_u f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x$

כלומר

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x = F'(0) \doteqdot \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

מקרה פרטי

$u = e^j$, ($j = 1, ...k$)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \right) \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x = \left.\frac{\partial f}{\partial e^j}\right|_x \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + te^j\right) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, ...x_j + t, ...x_k) - f(x_1, ...x_k)}{t}$$

הגדרה

אם נשנה את x בקבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^k$ מסויימת, ובכל נקודה x בD קיימות הנגזרות החלקיות $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x$, נאמר ש$f$ גזירה בD לפי כל המשתנים.

הפונקציות $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}$ נקראות הנגזרות החלקיות של f בD. ($j = 1, ...k$)

הפונקציה הוקטורית $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ... \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) : D^{\subseteq \mathbb{R}^k} \to \mathbb{R}^k$ נקראת הגדריינט של f, המסומנת $\operatorname{grad} f|_x$ או $\nabla f|_x$ או $(\nabla f)(x)$.
∇: נבלה (או גרדינט)

דוגמה ב$\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$D=\{(x,y)|x\neq 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\nabla f=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x):D\to\mathbb{R}^2$$

$f(x+h)-f(x)$ - שינוי של הפונקציה בנק' x(קבועה!) כאשר עוברים לנק' $x+h$.
$\|(x+h)-x\|=\|h\|<r$

מעוניינים בקירוב לינארי(בh) של השינוי הנ"ל: $L:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ "לינארית":

$$\lambda\in\mathbb{R},u,v\in\mathbb{R}^k:L(u+\lambda v)=Lu+\lambda Lv$$

עבו ר $x\in\mathbb{R}^k$ כלשהו, $x=\sum_{i=1}^k x_ie^i$:

$$Lx=L\left(\sum_{i=1}^k x_ie^i\right)=\sum_{i=1}^k x_iLe^i$$

$$\boxed{Le^i\doteqdot a_i\in\mathbb{R}}$$

$$Lx=\sum_{i=1}^k x_ia_i=a\cdot x$$

לפיכך, הפונקציונל $x\to x\cdot a$ הוא פונקציונאל לינארי. ז"א: הצורה הכללית של פונ-קציונל לינארי על $\mathbb{R}^k$ היא $x\to x\cdot a$(עבור $a\in\mathbb{R}^k$ מתאימים)

הגדרה

$$\varphi(h) \doteqdot [f(x+h)-f(x)]-Lh$$

מודד את השגיאה בקרוב הלינאיר.

הגדרה

תהי f מוגדרת בסביבה $B(x,r)$ של x ב-$\mathbb{R}^k$. נאמר ש-f דיפרנציאבילית בנקודה x אם קיים פונקציונל לינארי L כך ש(בסימונים לעיל)

$$(h\neq 0), \quad \frac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad (*)$$

סימון: כאשר $(*)$ מתקיים עבור פונקציה כלשהי(המוגדרת בסביבת $h=0$) אומרים ש-φ היא "או קטן" של $\|h\|$ וכותבים $\varphi(h)=o(\|h\|)$.

למשל

$$h^2 = o(|h|)$$

$$\frac{h^2}{|h|} = |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$h \neq o(|h|)$$

$$|h|^{1+\epsilon} = o(|h|)$$

מאידך

אם $M \leq \frac{|g(h)|}{\|h\|}$ בסביבה של 0, אומרים ש-$g(h)$ היא "או גדול" של $\|h\|$ ורושמים $g(h)=O(\|h\|)$

לדוגמה

$$o \Rightarrow O$$

כל פונקציונל לינארי $Lh = L(h)$ הוא O של $\|h\|$:

$$|Lh| = |h \cdot a| \leq \|h\| \|a\|$$

$$\frac{|Lh|}{\|h\|} \leq \|a\|$$

($\|a\|$ קבוע)

נחזור ל$\varphi(h)$:

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{Lh}_{O} + \underbrace{\varphi(h)}_{o}$$

משפט

אם f דיפרנציאבילית בנק' x, אזי הפונקציונל הלינארי(פ"ל) L בהגדרה <u>נקבע באופן יחיד</u>.

הוכחה

$f(x+h) - f(x) = Lh + \varphi(h)$ (בסימונים לעיל). $f(x+h) - f(x) = L'h + \tilde{\varphi}(h)$

$$o = Lh - L'h + [\varphi(h) - \tilde{\varphi}(h)]$$

$$L'h - Lh = h \cdot a' - h \cdot a = o(h)$$

$$h(a' - a) = \varphi^*(h)$$

$$\forall h, \|r\| < r$$

$$h = t(a' - a) \quad 0 < t < r$$

נציב:

$$t(a' - a)(a' - a) = \varphi^*(h)$$

$$t\|a' - a\|^2 = \varphi^*(h)$$

$$\frac{t\|a' - a\|^2}{t\|a' - a\|} = \frac{\varphi^*(h)}{\|h\|}$$

$$\|a' - a\| = \frac{\varphi^*(h)}{\|h\|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

צד שמאל לא תלוי בt, וצד ימין שואף ל0 כאשר $t \to 0$. לכן $\|a' - a\| = 0$ ז"א $a' = a$ ולכן $Ly = L'y$ לכל y ב$\mathbb{R}^k$, כלומר הפונקציות L', L מתלכדות.

הגדרה - דיפרנציאל

הפונקציונל הלינארי היחיד L כנ"ל נקרא הדיפרנציאל של f בנק' x, ומסומן ב$df\left(x\right)$ או $\left.df\right|_{x}$(אפשר גם להשתמש בD גדול במקום d קטן)
במקרה זה, ישנה הזהות

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=df\left(x\right)h+\varphi\left(h\right)$$

עם $\varphi\left(h\right)=o\left(\|h\|\right)$

תכונות של פונקציה דיפרנציאבילית

תכונה 1

אם f(המוגדרת בסביבה של נק' x ב$\mathbb{R}^{k}$) דיפרנציאבילית בנק' x, אזי היא רציפה בנק' x.

הוכחה

$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\left.df\right|_{x}h+\varphi\left(h\right)$ עם $\varphi\left(h\right)=o\left(\|h\|\right)$:

$$\left|\left.df\right|_{x}h\right|=\left|h\cdot a\right|\le\le\|h\|\|a\|\xrightarrow[h\to0]{}0$$

$$\varphi\left(h\right)=\frac{\varphi\left(h\right)}{\|h\|}\|h\|\xrightarrow[h\to0]{}0$$

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\xrightarrow[x\to0]{}0$$

$$f\left(x+h\right)\xrightarrow[x\to0]{}f\left(x\right)$$

ז"א: f רציפה בנקודה x.

תכונה 2

אם f(כנ"ל) דיפרנציאבילית בנק' x, אזי כל הנגזרות הכיווניות שלה קיימות בנק' x ומתקיימת הנוסחה:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x}=\left.df\right|_{x}u$$

הוכחה

$$F(t) = f(x+tu)$$

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} = \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

$$\left|\frac{F(t)-F(0)}{t} - \left.df\right|_x u\right| = \left|\frac{[f(x+tu)-df_x(tu)]}{t}\right| = \left|\frac{\varphi(tu)}{t}\right| = \frac{|\varphi(tu)|}{\|tu\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

ז"א

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} = \left.df\right|_x u$$

$$\exists F'(0) = ...$$

מש"ל

במיוחד

אם $u = e^j$ מקבלים שאם f דיפרנציאבילית בנק' x, אזי כל הנגזרות החלקיות $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x$ קיימות

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x = \left.df\right|_x e^j \doteqdot a_j$$

תזכורת

אם מסמנים $Le^j = a_j$, אזי $Lh = h \cdot a$

$$h = \sum h_j e^j$$

$$h = \sum h_h L e^j = ha$$

תוצאה

אם f דיפרנציאבילית בנק' x,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x = u \, \nabla f|_x$$

$$\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x\right| = |u \cdot \nabla f|_x| \leq \|u\| \| \nabla f|_x \|$$

כלומר $\left|\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x\right| \leq \| \nabla f|_x \|$

אם $\nabla f|_x \neq 0$, $u^* = \frac{\nabla f|_x}{\| \nabla f|_x \|}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הגרדיינט.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u^*}\right|_x = u^* \cdot \nabla f|_x = \frac{\nabla f|_x \cdot \nabla f|_x}{\| \nabla f|_x \|} = \| \nabla f|_x \|$$

$$\boxed{\max_u \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\right| = \left.\frac{\partial f}{\partial u^*}\right|_x = \| \nabla f|_x \|}$$