משפט ההתאמה

G חבורה, $N \triangleleft G$ תת נורמלית

יש התאמה חח"ע ועל בין:

תת-חבורות $N \subseteq H \subseteq G$	תת-חבורות של G/N
$N \subseteq H \subseteq G \rightsquigarrow$	$H/N \leq G/N$
$\{g \in G \mid gN \in K\} \leq G \leftarrow$	$K \leq G/N$

$$N \leq H \triangleleft G \iff H/N \triangleleft G/N$$

$$[G:H] = [G/N : H/N]$$

שאלה:

תהי $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ותהי $H = \langle (1,5) \rangle \leq G$.

א. מצאו הומומורפיזם $f: G \longrightarrow \mathbb{Z}$ כך ש- $\ker f = H$.

ב. הוכח ש.ש תת חבורה $K \leq G$ המקיימת $H \leq K$ וגם $[G:K] = 6$.

פתרון:

א. $H = \langle (1,5) \rangle = \{n(1,5) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(n, 5n) \mid n \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{(x,y) \in G \mid 5x = y\}$

נגדיר $f: G \longrightarrow \mathbb{Z}$ לפי $f(x,y) = 5x - y$.

צריך לוודא: f הומומורפיזם, $\ker f = H$.

ב. $6\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$, $[\mathbb{Z}:6\mathbb{Z}]=6$.

f על, לכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון $G/H \cong \mathbb{Z}$

$(f(0,-n)=n)$

לכן ממשפט ההתאמה קיימת תת-חבורה $H \le K \le G$

$[G:K]=6$.

$$K=f^{-1}(6\mathbb{Z})=\{(x,y)\in G \mid 6 \mid (5x-y)\}$$

$H \le ? \le G$ $\qquad$ $? \le G/H$

$H \le K \le G$ קיימת $\longleftarrow$ $6\mathbb{Z} \le \mathbb{Z} \cong G/H$

כמה הומומורפיזמים יש $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$?

מספיק לקבוע את $f(1)$. $f(1)$ יכול להיות כל איבר של $\mathbb{Z}_3$, לכן יש 3.

כמה הומומורפיזמים יש $f:\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}$?

אם f הומומורפיזם כלשהו $f(1)=n\in\mathbb{Z}$

$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2n$

$0=f(0)=f(1)+f(2)=3n \Rightarrow n=0$

לכן קיים רק ההומומורפיזם הטריוויאלי.

אפשרות ב': $Im f \le \mathbb{Z}$ סופית $\Rightarrow Im f=\{0\} \Rightarrow f$ הטריוויאלי

$f:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ $\qquad$ 2 הומומורפיזמים

$\{0,1\}$ $\quad$ $\{0,1\}$

העידון של קיילי:

$H\le G$,תה״ G פועלת על קבוצת המנה G/H.

$g*(aH)=gaH$

זה מגדיר הומומורפיזם

$\ker f = core(H)=\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ $\quad f: G \longrightarrow S_{[G:H]}$

אם G פשוטה, $\ker f = \{e\} \text{ or } = G \Leftarrow \ker f \trianglelefteq G$

אם $H\neq G$ אז הפעולה טרנזיטיבית, בפרט לא טריוויאלית, לכן $\ker f=\{e\}$

⇐ נקבל שיכון $G \hookrightarrow S_{[G:H]}$.

אוטומורפיזם של G = איזומורפיזם מ-G לעצמה.

$$Aut(G)=\{f:G\longrightarrow G \mid f \text{ אוטומורפיזם}\}$$

חבורה ביחס להרכבה.

דוגמה: ל-G $g\in G$ מגדיר $\boxed{\gamma_g : G\longrightarrow G}$ (אוטומורפיזם פנימי)

$\gamma_g(x)=gxg^{-1}$

$$Inn(G)=\{\gamma_g \mid g\in G\}\le Aut(G)$$

תרגיל: $Inn(G)\cong G/Z(G)$

$$G\longrightarrow Inn(G)$$
$$g\longmapsto \gamma_g$$

שאלה:

חשבו את מספר ההומומורפיזמים מ- $Inn(D_4)$ לעצמה.

פתרון: $D_4 = \langle \sigma,\tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = id,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$

$$Inn(D_4) \cong D_4/Z(D_4) \cong D_4/\langle\sigma^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

למה? $\frac{8}{2}=4$ $=\frac{|D_4|}{|\langle\sigma^2\rangle|} \underset{\text{לגראנז'}}{=} \left|D_4/\langle\sigma^2\rangle\right|$ $\Leftarrow$ זו חבורה אבלית $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}_4$ או $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

אבל ב- $D_4/\langle\sigma^2\rangle$ אין איבר מסדר 4 (וודאו!) $\Leftarrow$ $D_4/\langle\sigma^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

אפשרות ב: $G/Z(G)$ לא יכולה להיות ציקלית (מהתרגול) $\Leftarrow$ $D_4/\langle\sigma^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

עכשיו השאלה: כמה הומומורפיזמים יש מ- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ לעצמה?

$$\underset{(0,0)}{(0,0)},\ \underbrace{(1,0),\ (0,1)}_{\text{בחר אותם}},\ \underset{f(1,0)+f(0,1)}{(1,1)}$$

יש 16 הומומורפיזמים כאלו - לפי בחירה של $f(1,0)$, $f(0,1)$.

$End(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2) \cong M_2(\mathbb{Z}_2)$

כמה איזומורפיזמים יש?

$Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2) \cong GL_2(\mathbb{Z}_2)\ (\cong S_3)$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ הוא

מ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ ממימד 2

הומ' = העתקה לינארית = כפל במטריצה

איזו' = איזומורפיזם = כפל במטריצה הפיכה

ההומומורפיזמים מ-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ לעצמה: ל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0,0)=(0,0) \\ f(1,0)=(a,b) \\ f(0,1)=(c,d) \end{array} \Rightarrow f(1,1)=(a+c,\ b+d)}$$

בנוסחה:

$$f(m,n)=(\underbrace{ma+nc}_{\text{מודולו } 2},\ \underbrace{mb+nd}_{\text{מודולו } 2})$$

f מוגדר היטב: $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2 \Longrightarrow 2a=2b=2c=2d=0$.

$$f(m,n)+f(m',n')=\cdots=f((m,n)+(m',n'))$$

$$((1\ 2\ 3)(4\ 5))^3 \underset{\uparrow}{=} (1\ 2\ 3)^3(4\ 5)^3 = id\circ(4\ 5)=(4\ 5)$$

כי הם
זרים

פעולה נאמנה:

א. לא קיים איבר $e\neq g\in G$ שפועל טריוויאלית.
האיבר היחיד שפועל טריוויאלית הוא איבר היחידה.

ב. לכל $e\neq g\in G$ קיים $x\in X$ כך ש- $g*x\neq x$.

ג. ההומומורפיזם $G\hookrightarrow S_X$ חח"ע.

שאלה:

$|H|=n$, $|K|=m$.

$H\times K$ פועלת באופן נאמן על קבוצה מגודל $n+m$.

פתרון:

H פועלת על עצמה לפי כפל משמאל. זו פעולה נאמנה,
ומשפט קיילי $H\hookrightarrow S_n$

בדומה, $S_m \hookrightarrow K$. לכן

$$H \times K \hookrightarrow S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m}$$

$$(\sigma, \tau) \longmapsto \pi$$

$$\pi(i) = \begin{cases} \sigma(i), & 1 \le i \le n \\ \tau(i-n)+n, & n+1 \le i \le n+m \end{cases}$$

"σ פועל על n האיברים הראשונים, τ על m האחרונים"

לכן $H \times K$ פועלת נאמנה על קבוצה בגודל $n+m$.

ב. תהי G חבורה מסדר 16. הוכיחו שאם היא פועלת נאמנה על קבוצה מגודל 6, אז $G \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$.

$|G| = 16$

$G \hookrightarrow S_6$

לכן G איזומורפית לתת-חבורה $H \le S_6$

$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S_6$: D_4 פועלת נאמנה על קבוצה בגודל 4 (של קודקודי ריבוע)

$\mathbb{Z}_2$ פועלת נאמנה על עצמה

כמו בסעיף א'

$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow S_4 \times S_2 \hookrightarrow S_6$ איזומורפית לתת-חבורה $K \le S_6$.

תת-חבורה 2-סילו ב-S_6 = תת-חבורה מסדר 16.

מסילו II, כל שתי תת-חבורות 2-סילו צמודות זו לזו, ובפרט איזומורפיות. לכן $G \cong H \cong K \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$.

$H,K \leq G$ תתי-חבורות

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

באופן כללי $HK \nleq G$.

למשל: $G = S_3$, $H = \langle (1\ 2) \rangle$, $K = \langle (1\ 3) \rangle$

$$HK = \{id, (1\ 2), (1\ 3), \underset{(1\ 3\ 2)}{\underbrace{(1\ 2)(1\ 3)}}\} \nleq S_3$$

אם $H \triangleleft G$ או $K \triangleleft G$, אז $HK \leq G$

תרגיל: $HK \leq G \iff HK = KH$

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

האם $HK \triangleleft G \overset{?}{\iff} H \triangleleft G, K \triangleleft G$

$\boxed{\Rightarrow}$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ $K = G$, H תת-חבורה לא נורמלית כלשהי

$G = S_3$, $H = A_3$, $K = \langle (1\ 2) \rangle$. אז $HK = S_3 \triangleleft S_3$ אבל $K \ntriangleleft S_3$.

משפט האיזומורפיזם השני:

אם $H \leq G$ ו- $N \triangleleft G$, אז:
א. NH תת-חבורה של G; ב. $N \triangleleft NH$; ג. $H \cap N \triangleleft H$
3. $$NH/N \cong H/H \cap N$$

הגדרה:

איברים $a,b\in G$ צמודים אם יש $g\in G$ כך ש- $b=gag^{-1}$

ת"ח $H,K\leq G$ צמודות אם יש $g\in G$ כך ש- $K=gHg^{-1}$

(שוויון קבוצות)

האם G משוכן ב- S_{n_p} ?

($n_p =$ מספר ותת-חבורות p-סילו)

יש הומומורפיזם $S_{n_p} \longleftarrow G$ לפי הצמדה על ת"ח p-סילו,

אבל לא שיכון.