

## תרגיל בית 6 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשע"ט

**שאלה 1.** יהי  $f \in \mathbb{Q}[x]$  פולינום אי פריק, ויהי  $F/\mathbb{Q}$  שדה הפיצול שלו ב- $\mathbb{C}$ . הוכיחו שאם  $[F : \mathbb{Q}]$  אי זוגי, אז כל שורשי  $f(x)$  הם ממשיים. רמז: הצמדה מרוכבת היא אוטומורפיזם.

**שאלה 2.** חשבו את חבורת גלואה של ההרחבות הבאות:

א.  $E/\mathbb{Q}$  כאשר  $E$  הוא שדה הפיצול של  $x^5 - 1$

ב.  $E/F$  כאשר  $[E : F] = 2$  (ואפשר להניח שהמאפיין שונה מ-2). רמז: העזרו בשאלה מהתרגיל הקודם והראו  $E = F(\sqrt{a})$  עבור  $a \in F$ .

ג.  $E/\mathbb{Q}$  כאשר  $E$  הוא שדה פיצול של פולינום אי פריק ממעלה 3 שיש לו שורש מרוכב לא ממשי.

**שאלה 3.** תהינה  $K_1/F, K_2/F$  שתי הרחבות. נניח שיש איזומורפיזם  $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$  המקיים  $\varphi(F) = F$ . הוכיחו כי

$$\text{Gal}(K_1/F) \cong \text{Gal}(K_2/F)$$

**שאלה 4.** תהי  $K/\mathbb{F}_p$  הרחבת שדות סופית. הוכיחו כי  $\sigma(x) = x^p$  הוא איבר של  $\text{Gal}(K/\mathbb{F}_p)$ .

בהצלחה!