1. נסתכל על קבוצת ההעתקות הפרוייקטיביות מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו אשר שומרות על הקבוצה $\{0,1,\infty\}$ (ז"א: לכל $x \in \{0,1,\infty\}$ מתקיים $f(x) \in \{0,1,\infty\}$).

א. לאיזו חבורה איזומורפית קבוצת ההעתקות הנ"ל? הוכיחו איזומורפיזם.

ראשית, ניתן לראות שקבוצת העתקות זו היא חבורה היות והיא תת חבורה של $PGL_2(R)$ (קיימת סגירות כי הרכבת כל שתי העתקות שמשאירות את $\{0,1,\infty\}$ ב $\{0,1,\infty\}$ גם תשאיר אותן, וההפיכים גם בפנים היות ואלו העתקות הפיכות ומקורות $\{0,1,\infty\}$ הם $\{0,1,\infty\}$).

כעת נשים לב כי היות והיא שולחת 3 איברים לעצמם היא בעצם מגדירה עליהם תמורה, לכן קיימת העתקה f מקבוצת ההעתקות הנ"ל ל- Sym_3, כלומר נסמן 0 איבר ראשון, 1 איבר שני, אינסוף איבר שלישי ונתאים לכל העתקה את התמורה המעבירה i ל j אם האיבר ה-i עבר לאיבר ה-j.

העתקה זו היא הומומורפיזם היות והרכבת פונקציות תעבור להרכבת תמורות.

היא חח"ע היות ואם- $f(\sigma) = id$ אז $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(\infty) = \infty$,
לכן: $b = 0, c = 0 \Rightarrow a = d \Rightarrow \sigma(x) = x$. כלומר הגרעין הוא רק איבר היחידה: id.

על ניתן להראות מסעיף ב'.

ב. כמה העתקות פרוייקטיביות כאלו ישנן? מצא את כולן (כלומר רישמו את צורתן המפורשת: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$).

ג. כיתבו את המטריצות המתאימות להעתקות אלו ב $PSL_2(R)$.

$$f(x) = x, \quad 1/x, \quad 1-x, \quad 1/(1-x), \quad (x-1)/x, \quad x/(x-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ בהתאמה