שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_2 e_1 הוכיחו:

   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]

   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ לכל $g \in G_1$.

   (ג) שהגרעין המוגדר $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$ הוא תת־חבורה של G_1

   (ד) שהתמונה $Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in G_1\}$ היא תת־חבורה של G_2.

2. הגדרה: ההומופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

   (א) מצא המומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3

   (ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

   (א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

   (ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

   $$\Phi : G \to Aut(G)$$

   ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.
   הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi:(\mathbb{R}\backslash\{0\})\rightarrow\{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x)=\frac{x}{|x|}=sign(x)$. (לדוגמה: $\phi(-3)=-1$ $\phi(3)=1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין

(ב) : $\phi:(\mathbb{C}\backslash\{0\})\rightarrow\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a+ib)=a^2+b^2$. (לדוגמה: $\phi(1+2i)=5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

(ג) ההומורפיזים $\phi:S_n\rightarrow\{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma)=sign(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

5. תהא G חבורה סופית. נסמן ב $\sim$ את יחס הצמידות.

(א) יהא $x\in G$, ונסמן $H=C(x)=\{g\in G\,:\,gx=xg\}$ המרכז של x. נגדיר יחס שקילות נוסף על G:

$$g_1\equiv g_2\iff g_1^{-1}g_2\in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x. כלומר

$$|G/\equiv|=|[x]_\sim|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f:G/\equiv\rightarrow[x]_\sim$$

ע"י

$$\forall[g]_\equiv\in G/\equiv\;:\;f([g]_\equiv)=gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x\in G$ מתקיים

$$|G|=k\,|[x]_\sim|$$

עבור kשלם כלשהוא.

6. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטראלי תמיד שייך למרכז..) כלומר

$$|Z(G)|>1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) Gהיא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה $\mathbb{Z}_p$ (שקילות מספרים שלמים מודולו p)

.7

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
כלומר הקבוצות$K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.
(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G: \; gH = Hg$$