

פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 1

1. ע"י פישוט מקבלים $z = 4 + 4i$. אם כך, $r = 4\sqrt{2}$, $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, כלומר $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{א.}$$

$$z^{17} = 4^{17}\sqrt{2}^{17}e^{i\frac{17\pi}{4}} = 4^{17}2^8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{42}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ב.}$$

$$(\bar{z})^{17} = \bar{z}^{17} = 2^{42}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ג.}$$

$$z^{2n} = 4^{2n}2^n e^{i\frac{n\pi}{2}} = 2^{5n}e^{i\frac{n\pi}{2}} = 2^{5n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{ד.}$$

$$\operatorname{Im}(z^{2n}) = 2^{5n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2.

$$z^6 = (1-i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} \quad \text{א.}$$

$$z_k = \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{1}{8}\pi i + \frac{2\pi ki}{6}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi}{8}i + \frac{2\pi ki}{6}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{ב. נציב } w = \frac{z-1}{z+1}, \text{ ואז } w^5 = 2e^0 \Rightarrow w_k = 2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ ניתן לחלץ את } z$$

$$\text{חזרה. } z_k = \frac{w_k + 1}{1 - w_k} = \frac{2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}} + 1}{1 - 2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi ik}{5}}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ (רצוי להכפיל ולחלק בצמוד של המכנה).}$$

$$\text{ג. המשוואה היא } 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = \sum_{n=0}^4 (-z)^n = 0 \quad \text{אם המנה בסכום ההנדסי, } q = -z, \text{ היא לא}$$

$$\text{אחד (ז.א. } z \neq -1), \text{ ניתן להשתמש בנוסחה לסכום הנדסי ולקבל } \frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \quad \text{מקבלים לכאורה}$$

חמישה פתרונות למשוואה $(-z)^5 = 1$ והם $z_k = -e^{\frac{2\pi ik}{5}}$ עבור $k = 0, 1, 2, 3, 4$ - אך יש לשים לב שהפתרון $z_0 = -1$ לא חוקי (הנוסחה ההנדסית לא עובדת במקרה זה). אפשר לבדוק שמינוס אחד לא פותר את המשוואה, ונשארים עם ארבעת הפתרונות z_1, z_2, z_3, z_4 .

ד. נציב $w = z - i$ ונקבל משוואה דו-ריבועית $w^2 + 2w + 2 = 0$. אפשר לפתור משוואה זו בקלות:

$$w_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

מכאן מקבלים שתי משוואות בשביל z , שכל אחת מהן תתן n

פתרונות. הראשונה $(z - i)^n = -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$ נותנת $z_k - i = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}}$ כלומר

$$z_k = i + 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

השנייה באופן דומה נותנת

$$z_k = i + 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{3\pi}{4n}i + \frac{2\pi ik}{n}} \quad \text{עם אותם ערכים ל-} k$$

3.

א. ראשית, אם θ היא כפולה שלמה של π , $S_n = 0$. נניח מעתה את ההפך, ונקבל

$$\begin{aligned} S_n &= \text{Im}(e^{i\theta}) + \text{Im}(e^{2i\theta}) + \dots + \text{Im}(e^{ni\theta}) = \text{Im}\left(\sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k\right) = \text{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \overline{\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}} = \frac{1}{2i} \left[(1 - e^{-i\theta})(1 - e^{i(n+1)\theta}) - (1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i(n+1)\theta}) \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[1 - e^{i(n+1)\theta} - e^{-i\theta} + e^{in\theta} - 1 + e^{-i(n+1)\theta} + e^{i\theta} - e^{-in\theta} \right] = \frac{1}{2i} \left[(e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta}) + (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) + (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i \sin(-(n+1)\theta) + 2i \sin(n\theta) + 2i \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{-\sin[(n+1)\theta] + \sin(n\theta) + \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Re}(e^{ik\theta}) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k}\right) = \text{Re}\left[(1 + e^{i\theta})^n\right] = \frac{(1 + e^{i\theta})^n + \overline{(1 + e^{i\theta})^n}}{2} = \\ &= \frac{(1 + e^{i\theta})^n + (1 + e^{-i\theta})^n}{2} \end{aligned}$$

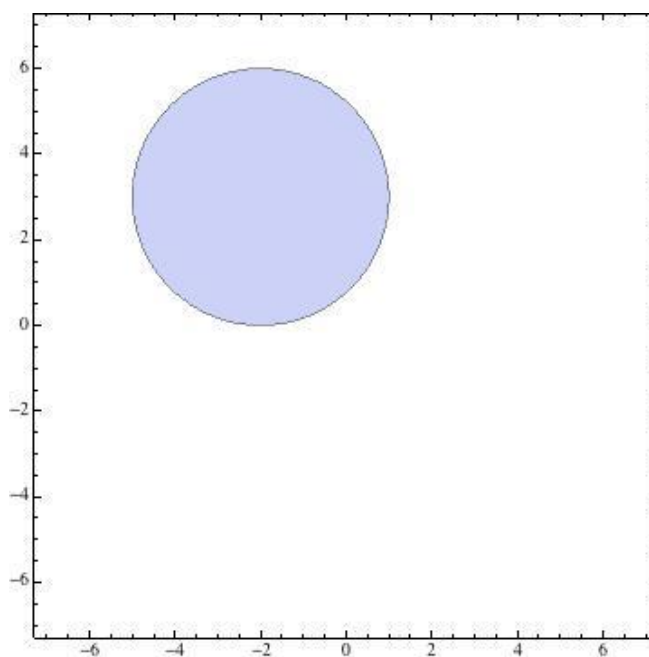
4. נתון כי $x^2 + y^2 = 1$. נתחיל בחישוב:

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{(x+1)(x-1) + y^2 + i[(x-1)y - (x+1)y]}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 + i[\dots]}{[\dots]} \end{aligned}$$

מהנתון, החלק הממשי של זה אפס, ולכן $\frac{z+1}{z-1}$ מדומה טהור.

5.

א. זהו עיגול סגור (עם שפה). מרכזו בנק' $(-2, 3)$, ורדיוסו באורך 3 יחידות.



ב. אליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן משתי נקודות קבועות, הוא קבוע.

