תרגיל בית 1 - אנליזה למורים

23 בנובמבר 2016

שאלה 1

פתרון את השוויונים ואת האי שוויונים הבאים:

א) $2|-2x-2|-3=13$

פתרון: $4|x+1|=16 \leftarrow x+1=\pm 4 \leftarrow x=3,-5$

ב) $|x-1|=2x+1$

פתרון: $x-1=\pm(2x+1) \leftarrow x=0,-2$

ג) $|2x-1|=x^2$

פתרון: $x^2=\pm(2x-1)$, לאחר פתרון של משוואה ריבועית מקבלים את הפתרונות הבאים: $x=1,-1\pm\sqrt{2}$.

ד) $|x-1|=|x^2-2x+1|$

נשים לב ש-$0 \geq (x-1)^2 = x^2-2x+1$ ולכן אפשר להוריד ערך מוחלט ולקבל $|x-1|=x^2-2x+1$. ולכן $x-1=\pm\left(x^2-2x+1\right)$. לאחר פתרון של משווא ריבעוית נקבל את פתרונות באים: $0,1,2$

ה) $-3|-2x+4|\leq 4$

פתרון: נכון לכל x ממשי משום שמצד שמאל יש מספר אי חיובי תמיד ומצד ימין מספר חיובי ולכן אי שוויון זה תמיד מתקיים.

ו) $|x^2+x-2|<x+3$

נקודות אשר מאפסות את ביטוי בערך מוחלט הן: $x=-1,2$.

בתחום $x>2$ ביטוי בתוך ערך המוחלט חיובי ולכן אפשר להוריד ערך מוחלט, אי שוויון שמתקבל: $x^2+x-2<x+3$. פתרון שלו הוא $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ חיתוך ילד עם התחום $x>2$ נותן $2<x<\sqrt{5}$.

בתחום $1 < x < 2$ הביטוי בערך מוחלט שלילי ולכן אחרי הורדת של ערך מוחלט נשים לפניו "$-$" ונקבל $-(x^2+x-2) < x+3$. כל $x \neq 1$ מקיים את אי שוויון ולכן חותוך עם התחום $1 < x < 2$ נותן $1 < x < 2$ וגם $x \neq 1$.

בתחום $x < -1$ הביטוי שבסוגרים הוא שוב חיובי ולכן אותם x־ים אשר מקיימים את אי השוויון הם $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ ולכן חיתוך עם $x < -1$ נותן $-\sqrt{5} < x < -1$.

נקודה $x = 2$ מקיימת את אי השוויון ולכן הפתרון הוא $2 \le x < 5$ או $1 < x < 2$ או $-\sqrt{5} < x < -1$

ז) $||x-1|-5| < 4$

פתרון: $||x-1|-5| < 4 \Longleftrightarrow |x-1|-5 < 4$ וגם $|x-1|-5 > -4$ ולכן $|x-1| < 9$ וגם $|x-1| > 1$. פתרון לאי שוויון ראשון הוא $-8 < x < 10$, ולאי שוויון שני הוא $x > 2$ או $x < 0$. חיתוך בין שני התחומים הוא $2 < x < 10$ או $-8 < x < 0$.

ח) $|2x^2-x-1|+1 < x^2$

פתרון: אף x אינו מקיים את אי שוויון.

ט) $9^x + 9^{x+1} = 30$

פתרון: $3^{2x} + 3^{2x}\cdot 9 = 10 \cdot 3^{2x} = 30$. נחלק את שני האגפים ב־10 ונקבל $3^{2x} = 3$ ולכן פתרון לאי שוויון הוא $x = \frac{1}{2}$.

י) $16^x + 4 = 65 \cdot 4^{x-1}$

פתרון: נכפיל את שני אגפים ב־4 ונקבל $4 \cdot 16^x + 16 = 65 \cdot 4^x$ לאחר העברת אגפים נקבל את המשוואה הבאה: $4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16 = 0$. נסמן $t = 4^x$, לאחר הצבה במשוואה מקבלים $4t^2 - 65t + 16 = 0$. לאחר פתרון של משוואה ריבועית מקבלים $t_1 = 16$ $t_2 = \frac{1}{4}$. סה"כ פתרון למשוואה הוא $x = 1, \frac{-1}{2}$.

ה) $$\begin{cases} 9^x - 2y = 3 \\ 3^x + y = 6 \end{cases}$$

פתרון: נכפיל את שתי משוואת ב־2 ונחבר ביניהן על מנת לבטל את y, אחרי פעולה זו מקבלים את משוואה $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 15$, נציב $t = 3^x$ ואחרי פתרון של משוואה ריבועית נקבל $x = 1$. נחלץ את yמאחת המשוואות ונקבל $y = 3$.

שאלה 2

א) מצא את x מהמשוואה: $log_2\left(log_x\left(2x+3\right)\right)=1$

פתרון: נמצא קודם תחום הגדרה: צריך להתקיים $log_x\left(2x+3\right)>0$ וגם $1\neq x>0$ וגם $2x+3>0 \Leftarrow x>-\frac{3}{2}$.

עכשיו נבדוק מתי $log_x\left(2x+3\right)>0$: אם $x>1$ אז $2x+3>1$ ולכן $x>-1$. אם $x<1$ אז $2x+3<1$ ולכן $x<-1$

ס"כ חיתוך בין כל התחומים נותן $1\neq x>0$

עכשיו נמצא פתרון לאי שוויון: $log_2\left(log_x\left(2x+3\right)\right)= \Leftarrow log_x\left(2x+3\right)=2 \Leftarrow 2x+3=x^2$

1. פתרון של משוואה ריבועית נותן $x_{1,2}=3,-1$ אבל -1 לא בתחום ההגדרה ולכן הפתרון הוא $x=3$.

ב) מצא לאילו ערכי x, גרף של פונקציה $y=log_2\left(x^2-6x\right)-4$ נמצא מתחת לציר ה־x.

פתרון: רוצים למצוא באיזה תחום $log_2\left(x^2-6x\right)-4>0$. תחום ההגדרה הוא $x>6$ או $x<0$ ולכן נשאר לנו לפתור את אי שוויון $x^2-6x>16$ ולעשות חותוך עם תחום ההגדרה. סה"כ מקבלים $x>8$ או $x<-2$.

ג) פתור את אי השוויון $log_{\frac{1}{2}}\left(log_4 x\right)\geq 0$

פתרון: תחום ההגדרה הוא $log_4 x>0$ משום ש־$1<4$ אז $x>1$.

$1<\frac{1}{2}$ אז $log_4 x\leq 1$ ולכן $x\leq 4$.

חיתוך עם תחום ההגדרה נותן $1<x\leq 4$.

שאלה 3

מצא עבור אילו ערכי x, גדולים ערכי הפונקציה $y=\left|x^2-4x\right|$ מערכי הישר $y=-3x+12$

פתרון: רוצים לבדוק מתי $\left|x^2-4x\right|>-3x+12$. נקודות אשר מאפסות את ביטוי בתוך ערך מוחלט הן $x=0,4$. כמו תמיד, נחתק את תחום ל 3 תחומים ונבדוק את התנהגות אל אי השוויון בכל אחד מהתחומים. ס"כ פתרון וא $x>4$ ואו $3<x<4$ או $x<-3$.