תרגול 3 – אנליזה מודרנית

1. הגדרנו בהרצאה כי אם (X,S) הינו מרחב מדיד אז $f:X\to\mathbb{R}^*$ הינה מדידה אם מתקיים:

$$\text{לכל } \alpha\in\mathbb{R} \quad \{x\in X: f(x)\le\alpha\}\in S$$

שאלה: האם הפונקציה הבאה הינה מדידה בורל?

$$T(x)=\begin{cases}\sin 2x & x>0\\ 1+\cos x & x\le 0\end{cases}$$

פתרון: נגדיר את הפונקציות

$f(x)=I_{(0,\infty)}(x)$ ואת $h(x)=I_{(-\infty,0]}(x)$. אלו פונקציות מדידות שכן הקטעים $(0,\infty)$ $(-\infty,0]$ הינם מדידים בורל. ראינו בהרצאה כי מכפלה וחיבור של פונקציות מדידות הינה מדידה ולכן נקבל

$$T(x)=(\sin 2x)I_{(0,\infty)}(x)+(1+\cos x)I_{(-\infty,0]}(x)$$

הינה מדידה בורל.

2. תרגיל: תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד D. הראה כי f מדידה אמ"מ הפונקציה g המוגדרת על $\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=g(x)$ לכל $x\in D$ ו $g(x)=0$ עבור $x\notin D$ מדידה.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי f מדידה. אם $\alpha\ge 0$, אזי $\{x:g(x)>\alpha\}=\{x:f(x)>\alpha\}$ וזו קבוצה מדידה. אם $\alpha<0$, אזי $\{x:g(x)>\alpha\}=\{x:f(x)>\alpha\}\cup D^c$ שגם היא מדידה. לכן g מדידה.

$\Rightarrow$: נניח g מדידה. אזי $f=g|_D$ ומכיוון ש D מדידה אז f מדידה.

3. הראו כי הגדרה שקולה הינה : פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $f^{-1}(A)\in S$ לכל קבוצה A מדידה בורל.

פתרון: ברור כי ההגדרה השניה גוררת את ההגדרה הראשונה. כעת נוכיח כי ההגדרה הראשונה גוררת את השניה. נניח כי S הינה סיגמא אלגברה מעל X . נראה כי קבוצת כל הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}(A) \in S$ הינה סיגמא אלגברה. נסמן קבוצה זו ב $\mathcal{B}$.

i. $f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in S \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}$

ii. אם $f^{-1}(A) \in S$, כלומר $A \in \mathcal{B}$ אז $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c \in S$ ולכן $A^c \in \mathcal{B}$.

iii. אם $f^{-1}(A_n) \in S$, כלומר $A_n \in \mathcal{B}$, אזי $f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A_n) \in S$, כלומר $\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}$. מכאן כי $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה.

כעת, עפ"י ההגדרה הראשונה ברור כי $(-\infty, \alpha] \in \mathcal{B}$ עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$. מכאן ש $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את הקטעים מהצורה $(-\infty, \alpha]$ ולכן מכילה את כל הקבוצות המדידות בורל.

4. יהי (X, S) מרחב מדיד ויהיו $f : X \to \mathbb{R}$ ו $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות לבג ובורל בהתאמה. הראו כי $h = g \circ f$ מדידה לבג.

פתרון: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה בורל, אזי $h^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$. מכיוון ש g מדידה בורל נובע כי $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. מכיוון ש f מדידה לבג נובע כי $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ מדידה לבג ומכאן ש h מדידה לבג.

5. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב 1- ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:

i. $\alpha \in f(\mathbb{R})$: אזי מהמונוטוניות של f נקבל כי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\alpha), \infty)$.

ii. $\alpha \notin f(\mathbb{R})$: נגדיר את β להיות $\beta = \inf\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$, כאשר $\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ איננה הקבוצה הריקה . אזי

א. $\beta \in \{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$: אזי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = [f^{-1}(\beta), \infty)$.

ב. $\beta \notin \{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$: אזי $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = (f^{-1}(\beta), \infty)$.

ג. אם $\{f(x) \mid f(x) > \alpha\}$ הינה ריקה אז היא מדידה.

בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה.

6. **<u>תרגיל:</u>**

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x \in U : f \text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

פתרון:

לכל $x \in U, \delta > 0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x,\delta)\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x) := \inf\{\omega(x,\delta) : \delta > 0\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a = \{x : \omega(x) < a\}$ היא פתוחה.

הוכחת הטענה:

יהי $x_0 \in E_a$, ישנה $\delta_0 > 0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$

(אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right) = \sup\left\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right)\right\} \le \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x) < a$ לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x אם"ם $\omega(x) = 0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\{x : f \text{ is continuous at x}\} = \{x : \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : \omega(x) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ. מש"ל.

7. טענה:
   א. לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה וחסומה הינה גבול של סדרת פונק' פשוטות המתכנסות במ"ש ל f.
   ב. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ מדידה אזי קיימת סדרה של פונקציות מדידות עולות $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ כאשר ההתכנסות היא נקודתית.

הוכחה:

א. נניח כי הטווח של f הוא $[0,\infty)$, אחרת, נרשום $f = f^+ - f^-$ וזה שקול.

כעת, נניח כי N הינו השלם הראשון כך ש $N > \sup f$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{N2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{E_{n,k}}(x)$$

כאשר $E_{n,k}=f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)\right)$. מכאן ש φ_n מדידות עם הצגה קנונית.

טענה: $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$

הוכחה:

$$\varphi_n(x)=\frac{k-1}{2^n}\Leftrightarrow f(x)\in\left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\Leftrightarrow f(x)\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\ or\ f(x)\in\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \varphi_{n+1}(x)=\frac{k-1}{2^n}\quad or\quad \varphi_{n+1}(x)=\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}$$

עכשיו נראה כי לכל n ולכל $x\in\mathbb{R}$ $0\le f(x)-\varphi_n(x)<\frac{1}{2^n}$: ניקח $x\in\mathbb{R}$, אזי $x\in E_{n,k}$ לאיזשהו $1\le k\le N2^n$, כלומר, $f(x)\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)\Rightarrow 0\le f-\varphi_n\le\frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$

ומכאן שההתכנסות היא במידה שווה.

ב. אם ל f טווח של $[0,\infty]$ נגדיר

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{E_{n,k}}(x)+nI_{F_n}$$

כאשר $F_n=\{f\ge n\}$. גם כאן, ניתן לראות עפ"י מה שהוכחנו, ש φ_n מדידות ו $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}\ \varphi_n\le f$. אם $f(x)=\infty$ לאיזשהו x אזי $\forall n\in\mathbb{N}\quad x\in F_n$, ו $\varphi_n(x)=n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\infty$. אם $f(x)<\infty$, יהי $n>f(x)$, אזי קיים k יחיד $1\le k\le n2^n$ כך ש $x\in E_{n,k}$. מכאן נובע כי $\varphi_n(x)=\frac{k-1}{2^n}$ כאשר $\frac{k-1}{2^n}\le f<\frac{k}{2^n}$ ולכן $0\le f(x)-\varphi_n(x)<\frac{1}{2^n}$

ומכאן ש $\lim\varphi_n(x)=f(x)$.