

תרגיל בית 5

שאלה 1

נסתכל בתת-חבורה (הנורמלית) של המספרים הרציונליים $(\mathbb{Q}, +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$.

א. הוכיחו כי בחבורת המנה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תת-החבורה של G שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{3}{8}$ ו- $\frac{1}{10}$

היא ציקלית. כלומר יש להוכיח $\langle \frac{1}{10} + \mathbb{Z}, \frac{3}{8} + \mathbb{Z} \rangle = \langle a + \mathbb{Z} \rangle$ עבור $a \in \mathbb{Q}$

כלשהו.

ג. מהו הסדר של תת-החבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב- G ?

שאלה 2

א. תהי $H \leq G$. הראו ש- $Z(H) \subseteq H \cap Z(G)$, ותנו דוגמה שבה זו הכלה אמיתית.

ב. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ולתת חבורה $H \leq G$ המדגימה את הדרוש:

1. $Z(H) \subset Z(G)$ (הכלה ממש)

2. $Z(G) \subset Z(H)$

3. $Z(H)$ אינו מוכל ב- $Z(G)$ ואינו מכיל אותו.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

א. קיים אפימורפיזם מהחבורה S_{14} לחבורה מסדר 34.

ב. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$.

ג. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$.

ד. קיים איזומורפיזם $\varphi: D_6 \rightarrow U_{13}$.

ה. קיים מונומורפיזם $\varphi: A_4 \rightarrow S_5$.

ו. קיים מונומורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_4$.

שאלה 4

- א. הוכיחו: אם $N \triangleleft G$ אזי $Z(N) \triangleleft G$.
- ב. מצאו תת חבורה מאינדקס 3 של S_4 , והראו שהיא אינה נורמלית.

שאלה 5

- א. תנו דוגמה נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A, B \triangleleft G$, ו- $G/A \cong B$, אזי $G/B \cong A$.
- ב. נניח $K \triangleleft G$ ו- $G/K \cong \mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת ב- G תת חבורה מאינדקס n .

שאלה 6

- הראו שבכל אחת מהחבורות S_3, S_6, \mathbb{Z}_2 קיימת תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל- \mathbb{Z}_3 , כך שהמנה איזומורפית ל- \mathbb{Z}_2 . האם קיימת בשתיהן תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל- \mathbb{Z}_2 ?

שאלה 7

- תהי G חבורה ו- $N \triangleleft G$. האם יתכן ש- N ו- G/N שתיהן אבליות, אבל G איננה כזאת?

שאלה 8

- א. תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת-חבורות נורמליות N, N' . הוכיחו: אם $N \cap H = N' \cap H$, אזי $(HN)/N \cong (HN')/N$.
- ב. תהי G חבורה ו- $N \triangleleft G$. נניח ש- G/N ו- N אבליות. תהי $H \leq G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $K \triangleleft H$, כך ש- H/K ו- K אבליות.

בהצלחה!