התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 4:התמרת פורייה וההתמרה ההפוכה ב $L_1(R)$

1.התמרת פורייה ונוסחת ההפיכה

מכאן ואילך, למטרת פישוט הניסוח, נניח כי מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $f(x)$ נתונה בציר $R=(-\infty,\infty)$ והינה חלקה למקוטעין ב R (ראה הרצאה 3)

2. $f \in L_1(R)$

נזכר באחד המשפטים מהרצאה 3:

משפט 1.1:

אם מתקיימים התנאים 1-2 אז לכל $x \in R$ מתקיימת הנוסחא האינטגרלית של פורייה:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma \quad (1.1)$$

כאשר:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{it\sigma}dt,\quad \sigma\in R \quad (1.2)$$

<u>הערה:</u> נזכיר שבמקום 2 ניתן לדרוש את קיום התנאים החד צדדיים של הולדר בנקודה $x \in R$ (מימין ומשמאל לנקודה) ומשפט 1.1 עדיין יתקיים (ראה הרצאה 3). אנו נשתמש במשפט 1.1 למטרת קיצור הניסוחים הבאים.

נחקור בקצרה את (1.1) ואת (1.2)

נוסחא (1.2) משווה את $f \in L_1(R)$ עם $F(\sigma)$. כדי להדגיש, ש $F(\sigma)$ היא התוצאה של הפעולה על הפונקציה המקורית $f \in L_1(R)$, נכתוב כך:

$$F(f)(\sigma)\big(\equiv F(\sigma)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it\sigma} dt, \quad \sigma \in R \quad (1.3)$$

אם כך, השוויון (1.3) אינו טענה, אלא הגדרה של הפעולה (1.3), אשר מוגדרת ב $L_1(R)$ ונקראת התמרת פורייה.

***תכונות** F:*

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R, \forall f_1, f_2 \in L_1(R) \quad F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 F(f_1) + \alpha_2 F(f_2)$

2. $\left|F(f)(\sigma)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$ (משפט רימן-לבג)

3. $F(\sigma) \in C(R)$ (משפט רימן-לבג)

4. $F(\sigma) \to 0$ כאשר $|\sigma| \to 0$ (משפט רימן-לבג)

מאפיינות את F כפעולה ליניארית, שפועלת מ $L_1(R)$ אל מרחב ליניארי $\overset{o}{C}(R)$

$$\overset{o}{C}(R) = \left\{ f : f \in C(R), \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\}$$

$$C(R) = \left\{ f : \sup_{x \in R} f(x) \big(= \|f\|_{C(R)} \big) < \infty, f \text{ continuous } \forall x \in R \right\}$$

נוסחא (1.1):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(f)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma, x\in R \quad (1.4)(\equiv(1.1))$$

בניגוד ל(1.3), זו אינה הגדרה, אלא טענה, אם הפונקציה $f(x)$ חלקה למקוטעין בR ו$f\in L_1(R)$ אז הנוסחא (1.4) תהיה מהצורה:

$$f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(f)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma, x\in R \quad (1.5)$$

אם כך, הנוסחא (1.5) משחזרת את ערכי $f(x)$ לפי התמרת הפורייה $F(f)(\sigma)$. לכן הנוסחאות (1.5) ו (1.4) נקראות נוסחאות הפיכה להתמרת פורייה. נדגיש שהינן נכונות רק בעבור הדרישות הנוספות ל$f(x)$ (בנוסף לתנאי $f\in L_1(R)$).

נצטרך עוד משפט על התמרת פורייה ההפוכה.

משפט 1.2:

תהי הפונקציה $f(x)$ נתונה בR ומקיימת את התכונות הבאות:

1. $f(x)\in L_1(R)$
2. $f(x)\in C(R)$

$\left(f\in L_1(R)\cap C(R)\Leftarrow\right)$

3. $F(f)(\sigma)\in L_1(R),\ \ F(f)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{it\sigma}dt$

אז עבור $x\in R$ מתקיימים השוויון:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (1.6)$$

באשר האינטגרל ב(1.6) הינו לפי המובן הרגיל ולא לפי מובן הערך העיקרי.

מכאן ואילך התמרת פורייה ההפוכה $F^{-1}(g)(x)$ מוגדרת כך:

$$F^{-1}(g)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (1.7)$$

2.תרגילים להתמרת פורייה הפוכה

תרגיל 1 (של המרצה):

עבור הפונקציה $(2.1) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ נבדוק את השוויון:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \ x \in R \quad (2.2)$$

פתרון:

ברור כי $f(x)$ היא פונקציה חלקה למקוטעין על R ו

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow f \in L_1(R)$ אזי, עבור $f(x)$ לפי (1.1)

חייבת להתקיים הנוסחא (2.2).

<u>חישוב $F(f)(\sigma)$</u>:

$$F(f)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{i\sigma x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{(i\sigma-1)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(i\sigma-1)x}}{i\sigma-1}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\sigma} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(f)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\sigma}, \quad \sigma \in R}$$

<u>חישוב $F^{-1}\left(F(f)(x)\right)$</u>:

אנו צריכים לחשב

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{1-i\sigma}$$

$$\Rightarrow J(x):=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{1-i\sigma},\quad x\in R$$

בשביל לחשב את $J(x)$ נשתמש בשיטת השאריות. נכתוב את $J(x)$ בצורה נוחה למיון:

$$J(x)=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{1-i\sigma}d\sigma$$

בתלות בסימן של x, יש לנו שלושה מקרים בשימוש במשפט השארית:

$$(a)\ x>0\quad (b)\ x<0\quad (c)\ x=0$$

- (a) מתקיים: $(-x)<0$, נבדוק את $J(x)=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-i\sigma}e^{i\sigma(-x)}d\sigma$

  תנאיי משפט השארית: $V.P.\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt,\quad \alpha<0$

1. $\boxed{f(z)=\frac{1}{1-iz}}\Leftarrow f(z)$ רגולרית בתחום $\operatorname{Im}z<0$, בכל מקום, חוץ מהנקודה $(1-iz_1=0)\quad \boxed{z=z_1=-i}$.
2. $\operatorname{Im}z_1=-1<0$
3. הפונקציה $f(z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Im}z\le 0$ בכל מקום חוץ מהנקודה $z_1=-i$: טריוויאלי.

4. $M(R)=\max\limits_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ \pi\le\varphi\le 2\pi}}\frac{1}{|1-iz|}\le\frac{1}{\left||z|-1\right|}=\frac{1}{R-1}\to 0$ כאשר $R\to\infty$

5. $\alpha(=-x)<0$

$$\Rightarrow V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-i\sigma}e^{-i\sigma x}d\sigma=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{e^{-izx}}{1-iz}=\left[-2\pi i\left.\frac{e^{-izx}}{\left(1-iz\right)'}\right|_{z=-i}\right]=$$

$$=-2\pi i\left[\frac{e^{-i(-ix)}}{-i}\right]=2\pi e^{i^2x}=2\pi e^{-x}\Rightarrow V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}dx=$$

$$\left[in\ our\ case\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{1-i\sigma}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi e^{-x}=e^{-x},\ \ x>0$$

(b) מתקיים:

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}J(x),$$

$$J(x)=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{1-i\sigma}d\sigma=\left|x<0\right|=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma|x|}}{1-i\sigma}d\sigma,|x|>0$$

נבדוק את תנאי משפט השארית:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt,\ \ \alpha>0$$

1. $\boxed{f(z)=\frac{1}{1-iz}}\Rightarrow$ רגולרית בתחום $1-iz=0$ עבור

$z=-i\notin\{z:\operatorname{Im}z\ge 0\}$. אם כך הפונקציה $f(z)e^{iz|x|}$ אינה בעלת קטבים לכן

$\Leftarrow J(x)=0$ (לפי המשפט העיקרי של קושי)

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma=\left[in\ our\ case\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{1-i\sigma}d\sigma=0,\ x<0$$

.2

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\Big|_{x=0}=V.P.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1-i\sigma}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i+i\sigma}{1+\sigma^2}=V.P.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}+\underbrace{V.P.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma d\sigma}{1+\sigma^2}}_{=0:odd\ \ function}$$

האינטגרל הראשון מתכנס $\Leftarrow V.P.$ ניתן להוריד. האינטגרל השני שווה ל0:פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי. לכן הביטוי שווה ל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}=\frac{1}{\pi}\arctan\sigma\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$$ לכן :

$$\frac{1}{2}=\frac{e^{-x}\Big|_{x=+0}+0\Big|_{x=-0}}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\Bigg|_{x=c}$$

אם כך נוסחת ההפיכה במקרה (2.1) נכונה.

תרגיל 2(של המרצה):

עבור הפונקציה $f(x)=e^{-\alpha|x|},\alpha>0\quad(2.4)$ בדוק את השוויון:

$$F^{-1}\big(F(f)\big)(x)=f(x),\quad x\in R\quad(2.5)$$

פתרון: ידוע (ראה הרצאה 2, פרק 3, תרגיל 2): $F(f)(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2},\quad \sigma\in R$

עבור $f(x)=e^{-\alpha|x|},\alpha>0$. ברור כי $f(x)$ הינה פונקציה חלקה למקוטעין, ולפי משפט 1.1 (או 1.2) צריך להתקיים השוויון (2.5). למטרת בדיקה ישירה של (2.5) נתבונן על הגודל:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}F(f)(\sigma)e^{-i\sigma x}dx=\left[F(f)(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{-i\sigma x}dx\Rightarrow$$

נחשב את $\varphi(x)$ בעזרת משפט השארית - בתלות בסימן x יהיו לנו 3 מקרים עבור משפט השארית:

$$(a)\ x<0\quad (b)\ x>0\quad (c)\ x=0$$

$$\Leftarrow\varphi(x)=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{i\sigma|x|}d\sigma\Leftarrow -x=|x|>0\Leftarrow(a)$$

נבדוק את תנאי משפט השארית:

1. $\boxed{f(z):=\frac{\alpha}{\alpha^2+z^2}}\Leftarrow$ הפונקציה $\varphi(x)$ רגולרית בתחום $\operatorname{Im}z\geq 0$ בכל מקום חוץ מבנקודות:

$$\alpha^2+z^2=0\Rightarrow z_1=i\alpha,z_2=-i\alpha\Rightarrow\left.\begin{matrix}z_1\in\{z:\operatorname{Im}z\geq 0\}\\ z_2\in\{z:\operatorname{Im}z\geq 0\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{z_1=i\alpha\in\{z:\operatorname{Im}z\geq 0\}}$$

2. $\operatorname{Im}z>0$

3. הפונקציה $f(z)$ בתחום $\operatorname{Im}z\geq 0$ רציפה בכל מקום, חוץ מבנקודה $z=z_1$ (טריוויאלי)

4. $M(R)=\max_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ \varphi\in[0,\pi]}}|f(z)|=\max_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ \varphi\in[0,\pi]}}\frac{\alpha}{|z^2+\alpha^2|}\le\max_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ \varphi\in[0,\pi]}}\frac{\alpha}{\left||z|^2-\alpha^2\right|}=\frac{\alpha}{R^2-\alpha^2}\to 0$

כאשר $R\to\infty$.

$$\Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{i\sigma|x|}d\sigma=\frac{1}{\pi}2\pi i\operatorname*{Res}_{z_1=i\alpha}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+z^2}e^{iz|x|}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}2\pi i\left[\left.\frac{\alpha}{\left(\alpha^2+z^2\right)'}e^{iz|x|}\right|_{z=i\alpha}\right]=2i\frac{\alpha}{2i\alpha}e^{i\cdot i\alpha|x|}=e^{-\alpha|x|}$$

$(b)\Rightarrow d\sigma e^{i\sigma(-|x|)}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}V.P.\frac{1}{\pi}=\varphi(x)\Rightarrow$ נבדוק את תנאי משפט השארית:

(i.e. $(b)\Rightarrow\varphi(x)=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{i\sigma(-|x|)}d\sigma$)

1. $\boxed{f(z):=\frac{\alpha}{\alpha^2+z^2}}$ רגולרית בתחום $\operatorname{Im}z<0$ בכל מקום חוץ מבנקודה $z_2=-i\alpha$.

2. $\operatorname{Im}z_2=-\alpha<0$

3. הפונקציה $f(z)$ בתחום $\operatorname{Im}z\le 0$ בכל מקום, חוץ מבנקודה $z=z_2$

4. $M(R)=\max_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ \varphi\in[0,\pi]}}|f(z)|=[like\ in\ (a)]=\frac{\alpha}{R^2-\alpha^2}\to 0$ כאשר $R\to\infty$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{i\sigma\left(-|x|\right)}d\sigma=\frac{1}{\pi}(-2\pi i)\operatorname*{Res}_{z_1=-i\alpha}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+z^2}e^{iz(-|x|)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}(-2\pi i)\left[\left.\frac{\alpha}{\left(z^2+\alpha^2\right)'}e^{iz(-|x|)}\right|_{z=-i\alpha}\right]=-2i\frac{\alpha}{2i(-\alpha)}e^{-|x|i\cdot(-i\alpha)}=e^{-\alpha|x|}$$

(c)

$$\left.\varphi(x)\right|_{x=0}=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}e^{i\sigma x}d\sigma\Big|_{x=0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}d\sigma=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha d\sigma}{\alpha^2+\sigma^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha d\sigma}{1+\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2}d\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{\sigma}{\alpha}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1=e^{-\alpha|x|}\Big|_{x=0}$$

אם כך, הנוסחא (2.5) נכונה במקרה (2.4) מש"ל.

תרגיל 3:

עבור הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<1\\ 0, & x\geq 1\end{cases}\quad (2.6)$$

בדוק את השוויון:

$$F^{-1}\left(F(f)\right)(x)=f(x),\quad x\neq 1\quad (2.7)$$

פתרון:

בהרצאה 2 (ראה פרק 3 תרגיל 3) הראנו; כי במקרה (2.6) מתקיים השוויון:

$$F(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\sigma}{\sigma},\ \sigma\in R\quad (2.8)$$

לכן מתקיים (נשתמש בהמשך בפונקצית אוילר $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$):

$$F^{-1}\left(F(f)\right)(x)=\left[\ |x|\neq 1\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{-i\sigma x}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma-\frac{i}{\pi}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x: even\ function\\ \frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\sigma x: odd\ function\end{bmatrix}=\frac{2}{\pi}V.P.\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma=$$

$$\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}=\sin\alpha\cos\beta\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}V.P.\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1+x)\sigma}{\sigma}d\sigma+\frac{1}{\pi}V.P.\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(1-x)\sigma}{\sigma}d\sigma \quad (2.9)$$

נשים לב, כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\theta\sigma}{\sigma}d\sigma=\begin{cases}1,\theta>0\\ 0,\theta=0\\ -1,\theta<0\end{cases}=sign\theta$

אם $\theta>0$ אז:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\theta\sigma}{\sigma}d\sigma=\begin{bmatrix}\theta\sigma:=t\\ d\sigma=\frac{dt}{\theta}\end{bmatrix}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{\frac{t}{\theta}}\frac{dt}{\theta}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

המקרה $\theta=0$ טריוויאלי, עבור $\theta<0$ מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\theta\sigma}{\sigma}d\sigma = -\int_0^\infty \frac{\sin|\theta|\sigma}{\sigma}d\sigma = \left\||\theta|>0\right| = -\frac{\pi}{2}$$

לכן מ(2.9) עבור $x>1$ נובע: $F^{-1}\left(F(f)\right)(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] = 0$

ועבור $x<-1$: $F^{-1}\left(F(f)\right)(x) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = 0$

ועבור $|x|<1$: $F^{-1}\left(F(f)\right)(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = 1$

3.תכונות התמרת פורייה

תכונות התמרת פורייה הבאות ננסח (למטרת נוחיות) בצורת הטענות הבאות:

משפט 3.1: מתקיימות הטענות הבאות:

1. תהי $f \in L_1(R)$. אם $F(f)(\sigma) \equiv 0$ עבור $\sigma \in R$, אז $f(x) = 0$ כמעט בכל מקום ב R.
2. תהי $f \in L_1(R) \cap C(R)$. אם $F(f)(\sigma) \equiv 0$ עבור $\sigma \in R$, אז $f(x) \equiv 0$ בכל R.

הוכחה:

2) מבוסס על משפט (1.2) בפרק 1 של ההרצאה.

משפט 1.2:

אם $f \in L_1(R) \cap C(R)$ ו $F(f)(\sigma) \in L_1(R)$ אז

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (3.1)$$

(האינטגרל ב3.1 הינו לפי המובן הרגיל ללא $V.P.$).

כיוון ש $F(f)(\sigma)\equiv 0 \Leftarrow F(f)(\sigma)\in L_1(R) \Leftarrow x\in R,\ f(x)\equiv 0$ לפי נוסחא (3.1). מש"ל.

מסקנה 3.2:

מתקיימות הטענות:

1. יהיו $f_1\in L_1(R),\ f_2\in L_1(R)$. אם $F(f_1)(\sigma)\equiv F(f_2)(\sigma)$ עבור $\sigma\in R$, אזי $f_1=f_2$ במעט בכל מקום על R.
2. יהיו $f_1\in L_1(R)\cap C(R),\ f_2\in L_1(R)\cap C(R)$ אם $F(f_1)(\sigma)\equiv F(f_2)(\sigma)$ עבור $\sigma\in R$ אזי $x\in R,\ f_1\equiv f$.

על מנת להסיק את 3.2 צריך להשתמש במשפט 3.1 על הפונקציה $x\in R,\ f(x)=f_2(x)-f_1(x)$

משפט 3.3:

תהי $f\in L_1(R)$ ויהיו קיימות $f'(x),\dots,f^{(k)}(x)$ באשר $f^{(k)}(x)\in L_1(R)$ לכל $k=1\dots n$. אזי:

$$F(f^{(k)}(x))(\sigma)=(-i\sigma)^k F(f)(\sigma),\ k=1\dots n \quad (3.2)$$

הוכחה:

נתבונן רק במקרה $k=1$. עבור $n\geq 2$ המקרים דומים. אם כך, $f\in L_1(R)$ וגם $\exists f'\in L_1(R)$ $\Leftarrow$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0 \quad (3.3)$$

נבדוק את (3.3) עבור $x\to\infty$ (עבור $x\to-\infty$ המקרה דומה). יהי $x\geq 0$ $\Leftarrow$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt \quad (3.4)$$

כיוון ש $f'(x)\in L_1(R)$, אז האינטגרל $\int_0^\infty f'(t)dt$ מתכנס, זאת אומרת $\exists\lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(t)dt$,

בהסתמך על (3.4) $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ כאשר A הוא מספר כלשהו. יהי $A\neq 0$, אזי ברור ש

$\exists x_0=x_0(A)$ כך ש $|f(x)|\geq\frac{1}{2}|A|$ לכל $x\geq x_0$ $\Leftarrow$

$\infty=\int_{x_0}^\infty \frac{1}{2}|A|dt\leq\int_{x_0}^\infty |f(t)|dt\leq\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx<\infty$ סתירה.

זאת אומרת $A=0$ $\Leftarrow$ (3.3). כיוון ש $f'(x)\in L_1(R)$ אז $\exists F(f')(\sigma)$ $\Leftarrow$

$$\sqrt{2\pi}F(f')(\sigma)=\int_{-\infty}^\infty f'(x)e^{i\sigma x}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{i\sigma x}df(x)=\underbrace{e^{i\sigma x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0(see\ \ 3.3)}-$$

$$-i\sigma\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\sigma x}dx=(-i\sigma)\sqrt{2\pi}F(f)(\sigma)\Rightarrow F(f')(\sigma)=(-i\sigma)F(f)(\sigma),\sigma\in R$$

מש"ל.

תרגיל:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה

$$\varphi(x)=\frac{d^6}{dx^6}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right),\ x\in R,\ a>0$$

פתרון:

כיוון שהמכנה של הפונקציה הרציונאלית $f(x)=\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right),x\in R,\ a>0$ שונה מאפס

$\forall x\in R$ אזי $f(x)$ רציפה, וגזירה אינסוף פעמים $\forall x\in R$. בפרט $\forall x\in R$ $k=\overline{1,6}$. קל

לראות ש: $|x|\to\infty$, $f^{(n)}(x)\sim\frac{C(n)}{x^{2+n}}$ ולכן $f^{(k)}(x)\in L_1(R)$ $\forall k\geq 0$. $\Leftarrow$ לפי

משפט (3.3) נקבל:

$$F(\varphi)(\sigma)=F(f^{(6)})(\sigma)=(-i\sigma)^6F(f)(\sigma)=\sigma^6F(f)(\sigma)$$

אבל (ראה תרגיל אחרון בהרצאה 2, פרק 4):

$$F(f)(\sigma)=F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|\sigma|a}}{a}\Rightarrow$$

$$F(\varphi)(\sigma)=\sigma^6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|\sigma|a}}{a}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^6\frac{e^{-|\sigma|a}}{a}$$

מש"ל.

תרגיל (של המרצה):

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה

$$\varphi(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}},x\in R$$

פתרון:

תהי $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},x\in R$ $\Leftarrow$ $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ברור ש $f\in L_1(R)$ וגם $f'\in L_1(R)$. בהרצאה 2 (פרק 3 תרגיל 5) הראנו כי $F\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=e^{-\frac{\sigma^2}{2}},\sigma\in R$

לכן:

$$F\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)=F\left(\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\right)=\left[Theorem\ 3\right]=(-i\sigma)F\left(\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right)=$$

$$=i\sigma F\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=i\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$

מש"ל.

מסקנה 3.4:

תהי $f \in L_1(R)$ וגם קיימות $f'(x),\dots,f^{(n)}(x)$ באשר
$f^{(k)}(x) \in L_1(R),\ k=\overline{0,n}$. אזי

$$F(f)(\sigma)=o\left(\frac{1}{|\sigma|^n}\right),\quad |\sigma|\to\infty(3.5)$$

הוכחה:

לפי משפט (3.3) מתקיים: $F(f^{(k)}(x))(\sigma)=(-i\sigma)^k F(f)(\sigma)$ עבור $\sigma\in R$. זאת
אמרת, עבור $k=n$ נקבל:

$$F(f)(\sigma)=\frac{F(f^{(n)})(\sigma)}{\sigma^n},\ |\sigma| \gg 1\ \ (3.6)$$

כיוון ש $f^{(n)}(x)\in L_1(R) \Leftarrow F(f^{(n)})(\sigma)\to 0$ עבור $|\sigma|\to\infty$ (משפט רימן-לבג)
יחד עם (3.6) נותן את (3.5). מש"ל.

משפט 3.5:

תהי $f\in L_1(R)$, $\exists f'(x),\exists f''(x),\forall x\in R$. אם $f''(x)\in L_1(R)$ אזי
.$F(f)(\sigma)\in L_1(R)$

הוכחה:

כיוון ש $f''(x)\in L_1(R)$ אז לפי משפט (3.3) מתקיים:

$$F(f'')(\sigma)=\sigma^2F(f)(\sigma),\ \sigma\in R\ \ (3.7)$$

בנוסף, לפי משפט רימן-לבג נקבל:

$$|F(f'')(\sigma)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f''(x)\|_1\quad(3.8)$$

מ(3.7) ו(3.8) נסיק $\left|F(f)(\sigma)\right| = \frac{F(f'')(\sigma)}{\sigma^2} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\|f''\|_1}{\sigma^2} = \frac{c}{\sigma^2}$ זאת אומרת,

$$\int_{|\sigma|\ge 1} \left|F(f)(\sigma)\right| d\sigma \le c\int_{|\sigma|\ge 1} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = 2c\int_1^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = 2c < \infty$$

כיוון ש(שוב משפט רימן-לבג):

$$\int_{-1}^{1} \left|F(f)(\sigma)\right| d\sigma \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|f\|_1 \quad \Leftarrow \quad \|F(f)(\sigma)\|_1 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$$

ולבסוף נסיק:

$$\|F(f)(\sigma)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(f)(\sigma)\right| d\sigma = \int_{|\sigma|\le 1} \left|F(f)(\sigma)\right| d\sigma + \int_{|\sigma|\ge 1} \left|F(f)(\sigma)\right| d\sigma$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|f\|_1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\|f''\|_1 \le c < \infty$$

מש"ל.

מסקנה 3.6:

תהי $f \in L_1(R)$, $\exists f'(x), \exists f''(x), \forall x \in R$. אם $f''(x) \in L_1(R)$ אז מתקיימת נוסחא ההפיכה:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad x \in R \quad (3.9)$$

כאשר האינטגרל הינו לפי המובן הרגיל (ללא $V.P.$)

הוכחה:

כיוון ש $f \in L_1(R)$ וגם $\exists f'(x), \forall x \in R$ אז לפי המשפט העיקרי מתקיימת נוסחת ההפיכה:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad x \in R \quad (3.10)$$

אבל ב(3.10) $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$, כיוון ש $\exists f'(x)$, האינטגרל ב(3.10) מתכנס במובן הרגיל, ככיוון שלפי משפט 3.5 $F(\sigma)\Leftarrow f''\in L_1(R)$ ולכן האינטגרל ב(3.10) מתכנס במובן הרגיל ולכן שקול לערך העיקרי שלו $\Leftarrow$ (3.9). מש"ל.

משפט 3.7:

תהי $f\in L_1(R)$, $\exists f'(x),\exists f''(x),\forall x\in R$. אם $f''(x)\in L_1(R)$ אז $f(x)\in C(R)$ ומתקיים האי שוויון:

$$\|f\|_{C(R)}=\sup_{x\in R}|f(x)|\le\frac{1}{\pi}\left(\|f\|_1+\|f''\|_1\right)\quad(3.11)$$

(טענות מהצורה הזו נקראות *משפטי העתקה* ובעלות משמעות חשובה בתיאוריית המשוואות הדיפרנציאליות הרגילות).

הוכחה:

ברור שהפונקציה $f(\cdot)$ רציפה בכל נקודה $x\in R$, כיוון שבנקודה זו $\exists f'(x)$. לפי משפט 3.5 נקבל:

$F(f)(\sigma)\in L_1(R)$; בנוסף (ראה מסקנה של משפט 3.5):

$\|F(f)(\sigma)\|_1\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\|f\|_1+\|f''\|_1\right)$. כעת מ(3.9) נובע:

$\sup_{x\in R}|f(x)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma)|d\sigma\le\frac{1}{\pi}\left(\|f\|_1+\|f''\|_1\right)$ מש"ל.

משפט 3.8:

יהיו הפונקציות $f,xf,...x^pf$ כולן שייכות ל $L_1(R)$. אז הפונקציה $F(f)(\sigma)$, $\sigma\in R$ גזירה p פעמים ומקיימת את השוויון:

$$\left(F(f)(\sigma)\right)^{(k)}=F\left[(ix)^kf\right](\sigma),\quad k=0,1,...,p\quad(3.12)$$

הוכחה:

נבחן רק את המקרה בו $p=1$. כאשר $p>1$ ההוכחה דומה. נבדוק שניתן להפעיל על $F(f)(\sigma)$:

$$F(f)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \sigma\in R \quad (3.13)$$

את כלל לייבניץ:

$$F(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\sigma)dx \Leftrightarrow F'(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{d\sigma}f(x,\sigma)dx \quad (3.14).$$

נבדוק את תנאי כלל לייבניץ (3.14) (ראה משפט 2.3 בהרצאה 1):

1. $f(x,\sigma)=f(x)e^{i\sigma x}$ מוגדרת במישור $xo\sigma$ ומקיימת 2-5:
2. $\forall\sigma\in R$ קיים האינטגרל (במובן של רימן) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,\sigma)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{i\sigma x}|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$$

3. $\forall\sigma,\forall x\ \ \exists f_{\sigma}^{'}(x,\sigma)=f(x)ixe^{i\sigma x}$
4. $\forall\sigma\in R$ הפונקציה $f'(x,\sigma)$ אינטגרבילית לפי x (במובן של רימן) בכל קטע סופי:

$\int_a^b f_{\sigma}^{'}(x,\sigma)dx=\int_a^b f(x)ixe^{i\sigma x}dx$: טריויאלי, כיוון ש $f(x)$ ו $ixe^{i\sigma x}$ שניהן אינטגרביליות לפי רימן $\Leftarrow$ מכפלתן אינטגרבילית.

5. קיימת פונקציה אינטגרבילית לפי רימן $g(x)$ כך ש

$$\left|f_{\sigma}^{'}(x,\sigma)\right|=|x||f(x)|:=g(x)\Leftarrow\begin{cases}\left|f_{\sigma}^{'}(x,\sigma)\right|\le g(x),\forall x\in R,\forall\sigma\in R\\ g(x)\in L_1(R)\end{cases}$$

הכול מתקיים לפי תנאי המשפט $\Leftarrow$ ניתן להפעיל את כלל לייבניץ (3.14), לכן במקרה שלנו:

$$F'(f)(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{d\sigma}f(x)e^{i\sigma x}dx==\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(ixf(x)\right)e^{i\sigma x}dx=F\left(\left[ixf\right]\right)(\sigma)$$

מש"ל.

4.תכונות טכניות של התמרת פורייה

תהי $f(x)\in L_1(R)$. בפסקה הזו, נסמן $f(x)\to F(f)(\sigma)$, אם:

$$F(f)(\sigma)=F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \sigma\in R$$

לשם נוחות וקיצור הכתיב, תכונות התמרת פורייה מנוסחות כמשפטים.

משפט 4.1:

תהי $f\in L_1(R)$, $f(x)\to F(\sigma)$ $\Leftarrow$

$$f(ax)\to\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\sigma}{a}\right),\quad a\neq 0\quad (4.1)$$

הוכחה:

$$f(ax)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)e^{i\sigma x}dx=\begin{bmatrix}ax=t,\\ a>0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\frac{\sigma}{a}t}\frac{dt}{a}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\frac{\sigma}{a}t}\frac{dt}{|a|}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\sigma}{a}\right)$$

$$f(ax)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)e^{i\sigma x}dx=\begin{bmatrix}ax=t,\\ a<0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\frac{\sigma}{a}t}\frac{dt}{a}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-a)}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\frac{\sigma}{a}t}dt=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\sigma}{a}\right)$$

מש"ל.

תרגיל:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה:

$$f(x)=e^{-a^2x^2},a>0,x\in R$$

פתרון:

ידוע ש (ראה הרצאה 3, פרק 3, מספר 5):

$$\varphi(x):=e^{-\frac{x^2}{2}}\to e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\Rightarrow$$

ראה משפט 4.1

$$\varphi(\sqrt{2}ax)=\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}ax)^2)=e^{-a^2x^2}\to$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2a}}F(\frac{\sigma}{\sqrt{2a}})=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\sigma^2}{4a^2}}\Rightarrow$$

$$\boxed{e^{-a^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\sigma^2}{4a^2}}}$$

משפט 4.2:

נניח ש $f\in L_1(R)$ ו $f(x)\to F(\sigma)\Leftarrow$(להוכיח):

$$f(x-a)\to e^{i\sigma a}F(\sigma)\quad(4.2)$$

פתרון:

$$f(x-a)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}f(x-a)dx=\left|\begin{matrix}x-a=t\to\\x=t+a\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t+a)}f(t)dt=\frac{e^{i\sigma a}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma t}f(t)dt=$$

$$=e^{i\sigma a}F(\sigma)\Rightarrow\boxed{f(x-a)\to e^{i\sigma a}F(\sigma)}$$

תרגיל:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה: $f(x)=e^{-2|x-1|},\quad x\in R$

פתרון:

ידוע כי (ראה הרצאה 2,סעיף 3,תרגיל 2): $f(x)=e^{-\alpha|x|}\underset{(\alpha>0!)}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}$

עבור $\alpha=2$ מתקיים:

$$e^{-2|x|}\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}\bigg|_{\alpha=2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sigma^2+4}$$

וכעת- (4.2):

$$e^{-2|x-1|}\to\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{i\sigma}\frac{1}{\sigma^2+4}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\sigma}}{\sqrt{\pi}(\sigma^2+4)}\Rightarrow$$

$$\boxed{e^{-2|x-1|}\to\frac{4e^{i\sigma}}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2+4)}}$$

משפט 4.3:

אם מתקיים ש $f\in L_1(R)$ ו $f(x)\to F(\sigma)$. אזי:

$$a)\qquad f(x)\cos\omega x\to\frac{F(\sigma-\omega)+F(\sigma+\omega)}{2}\qquad(4.3)$$

$$b)\qquad f(x)\sin\omega x\to\frac{F(\sigma+\omega)-F(\sigma-\omega)}{2i}\qquad(4.4)$$

הוכחה:

$$f(x)\cos\omega x\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}f(x)\cos\omega x dx=$$

נשתמש בנוסחת אוילר

$$\left[\left.\begin{aligned}e^{i\omega x}&=\cos x+i\sin x\\ e^{-i\omega x}&=\cos x-i\sin x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\cos\omega x=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i(\sigma+\omega)x}dx+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i(\sigma-\omega)x}dx=$$

$$=\frac{F(\sigma+\omega)+F(\sigma-\omega)}{2}$$

הנוסחה השנייה מתקבלת בצורה דומה.

תרגיל:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה:

$$g(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos x, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

פתרון:

ידוע כי (ראה הרצאה 2 סעיף 3 תרגיל 1) :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\geq 0 \\ 0 \quad ,\mathrm{x}<0 \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{f(x)} \rightarrow \mathrm{F}(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i\sigma}$$

אזי לפי משפט 4.3 נקבל:

$$g(x)= f(x)\cos x = \left|w=1\right| \rightarrow \frac{F(\sigma+1)+F(\sigma-1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-i(\sigma+1)}+\frac{1}{1-i(\sigma-1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1-i\sigma+i+1-i\sigma-i}{1-i(\sigma-1)-i(\sigma+1)-(\sigma^2-1)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{2(1-i\sigma)}{1-i\sigma+i-i\sigma-i-\sigma^2+1}=$$

$$=\frac{1-i\sigma}{\sqrt{2\pi(2-2i\sigma-\sigma^2)}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-i\sigma}{2-2i\sigma-\sigma^2}}$$

5.שימוש בהתמרת פורייה לפתרון בעיות ערך שפה סינגולאריות

מטרתנו העיקרית-מציאת פתרון לבעיית ערך שפה סינגולארית הבאה:

$$\begin{cases} -y''(x)+q_0^2 y(x)=f(x),\ x\in \mathrm{R} & (5.1)\\ \lim\limits_{|x|\to\infty} y(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty} y'(x)=0 & (5.2)\end{cases}$$

כאשר $f(x)\in L_1(R)$ ו- $q_0>0$.

לצורך כך נצטרך כמה עובדות כלליות מתורת המשוואות

$$-y''(x)+q(x)y(x)=f(x),\ x\in \mathrm{R} \quad (5.3)$$

$$0\le q(x)\in L_1^{loc}(R) \quad (5.4)$$

מכאן והלאה נניח כי פונקציה $f(x)$ מהמשוואה (5.3) , שייכת ל- $L_1(R)$ והתנאי (5.4) מתקיים.ההגבלות הנ"ל לא יכנסו לניסוח.

הגדרה 5.1:

נאמר כי המשוואה (5.3) פתירה (חוקית) ב- $L_1(R)$ (ביתר דיוק במרחב $L_1(R)$), אם מתקיימות הטענות:

1. לכל פונקציה $f(x)\in L_1(R)$ המשוואה (5.3) בעלת פתרון יחיד $y(x)\in L_1(R)$.
2. קיים קבוע $c\in(0,\infty)$, כך ש פתרון $y(x)\in L_1(R)$ המשוואה (5.3) מקיים את אי השוויון הבא:

$$\|y\|_1\le c\|f\|_1,\quad \forall \mathrm{f}\in \mathrm{L}_1(R) \quad (5.5)$$

משפט 5.2:

המשוואה (5.3) פתירה ב- $L_1(R)$ אם ורק אם קיים מספר $a\in(0,\infty)$, כך ש:

$$\inf_{x\in R}\int_{x-a}^{x+a} q(t)dt>0 \quad (5.6)$$

מסקנה 5.3:

תהי במשוואה (5.3) פתירה ב- $L_1(R)$ ו- $y(x)\in L_1(R)$ פתרונה.אזי:

$$(5.7)\quad y(x)\to 0\ ,\ y'(x)\to 0 \text{ עבור } |x|\to\infty$$

$$(5.8)\quad \|y''\|_1+\|q(x)y\|_1\le 3\|f\|_1$$

$$(5.9)\quad \|y(x)\|_{c(R)}\le c\{\|y''\|_1+\|y\|_1\}\le c\|f\|_1$$

הערה 5.4:

האי שוויון ה-1 (5.9) הינו משפט ההכלה וההדחה (ראה 3.11).

האי שוויון ה-2 נובע מ-(5.5) ו-(5.8).

משפט 5.2 ומסקנותיו מכיל את כל המידע הא-פריורי על המשוואה (5.3),אשר הינה מספקת פתרון בעייתנו.

ובכן,יהי $q_0>0$ ($q_0=const$), $f(x)\in L_1(R)$.

נתבונן במשוואה (5.1):

$$-y''(x)+q_0^2y(x)=f(x),\ x\in R\ ,f(x)\in L_1(R)\qquad (5.1)$$

המשוואה (5.1) פתירה ב- $L_1(R)$,כיוון ש-(ראה משפט 5.2):

$$\inf_{x\in R}\int_{x-a}^{x+a}q(t)dt\Big|_{\substack{q(t)\equiv q_0^2>0\\ a:=1}}=\inf_{x\in R}\int_{x-1}^{x+1}q_0^2dt=2q_0^2>0$$

אזי המשוואה:

1. בעלת פתרון יחיד $y(x)\in L_1(R)$
2. הפתרון $y(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)$, (ראה (5.9))
3. $\boxed{y''\in L_1(R)}\Leftarrow$ אם $y(x)\to F(\sigma)$, אזי $F(\sigma)\in L_1(R)$
(ראה (5.8),ומשפט 3.5 מסעיף 3 לעיל)

4. $y(x)\to 0$, $y'(x)\to 0$ עבור $|x|\to\infty$.

למציאת פתרון מסוים של (5.1) נשתמש בהתמרת פורייה.נסמן:

$$V(\sigma)=(\vee f)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx$$

$$F(\sigma)=F(y)(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{i\sigma x}dx$$

כאן $f(x)\in L_1(R)$ לפי התנאי, $y(x)\in L_1(R)\bigcap C(R)$ (ראה 1).

וקיבלנו:

$$(\vee f)(\sigma)=V(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\left[q_0^2 y(x)-y''(x)\right]dx=\left|\begin{matrix} y''\in L_1(R) \quad (5.8) \\ q_0^2 y(x)\in L_1(R) \end{matrix}\right|=$$

אזי ניתן להשתמש באופרטור פורייה לכל איבר בסכום

$$=q_0^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{i\sigma x}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y''(x)e^{i\sigma x}dx=$$

$$=q_0^2F(\sigma)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y''(x)e^{i\sigma x}dx=$$

נעשה אינטגרציה בחלקים.נשתמש ב-4:

$y'(x)\to 0$ עבור $|x|\to\infty$.

$$=q_0^2F(\sigma)-\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\sigma x}y'(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}i\sigma e^{i\sigma x}y'(x)dx\right]=$$

$$=q_0^2F(\sigma)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\sigma\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}y'(x)dx=$$

נעשה אינטגרציה בחלקים.נשתמש ב-4:

$y(x)\rightarrow 0$ עבור $|x|\rightarrow\infty$.

$$=q_0^2F(\sigma)+\frac{i\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{e^{i\sigma x}y(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int_{-\infty}^{\infty}i\sigma e^{i\sigma x}y(x)dx\right]=$$

$$=q_0^2F(\sigma)-\frac{(i\sigma)^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}y(x)dx=\left|(i\sigma)^2=-\sigma^2\right|=$$

$$=q_0^2F(\sigma)+\sigma^2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}y(x)dx}_{F(\sigma)}=(q_0^2+\sigma^2)F(\sigma)$$

ובכן,קיבלנו במקום המשוואה המקורית (5.1), משוואה עבור תמונת פורייה $F(\sigma)$ עם פתרון $y(x)$:

$$(q_0^2+\sigma^2)F(\sigma)=V(\sigma) \qquad (5.10)$$

המטרה העיקרית לשימוש בהתמרת פורייה הינה בכך,כי פתרון של המשוואה המקורית (5.1) (בעיה קשה כי זוהי בעצם משוואה דיפרנציאלית) התמרת פורייה מחליפה לבעיה של מציאת התמרת פורייה ב-(5.10),וזו בעיה אלגברית יותר פשוטה.ובאמת מ-(5.10) נקבל:

$$F(\sigma)=\frac{1}{(q_0^2+\sigma^2)}V(\sigma),\quad \sigma\in\mathrm{R} \qquad (5.11)$$

מטרתנו כעת-למצוא לפי התמרה $F(\sigma)$ את הפונקציה שנוצרה על ידה, זאת אומרת להפוך את ההתמרה $F(\sigma)$.נזכיר (ראה משפט 1.2 לעיל) שאם:

1. $f(x) \in L_1(R) \bigcap C(R)$

2. $F(f)(\sigma) \in L_1(R), \;\; F(f)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$

אזי עבור $x \in R$ מתקיים השוויון:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \;\; \mathrm{x} \in \mathrm{R} \qquad (5.12)$$

האינטגרל ב-(5.12) הינו במובן הרגיל (ללא $v.p.$)

לכן,במקרה שלנו 1 ו-2 מתקיימים (ראה 2 ו-3 לעיל),אזי נקבל (לפי משפט 1.2-ראה (5.12)):

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = \left|(5.11)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \frac{V(\sigma)}{\sigma^2 + q_0^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2 + q_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} f(t) dt) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2 + q_0^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} f(t) dt \right] d\sigma, \;\; \mathrm{x} \in \mathrm{R} \;\; (5.13)$$

מטרתנו כעת-לשנות את סדר האינטגרציה ב-(5.13).ניקח שני מספרים $\alpha, \beta \in R \;, \;\; \alpha \le \beta$ ונניח

$$J(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2 + q_0^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} f(t) dt \right] d\sigma, \;\; \mathrm{x} \in \mathrm{R} \qquad (5.14)$$

הערה:

ברור כי $J(\alpha,\beta)$ קיים:

$$J(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2+q_0^2}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma x}f(t)dt\right]}_{\sqrt{2\pi}F(\sigma)}d\sigma$$

ובאמת, הפונקציה באינטגרל

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2+q_0^2}\cdot\sqrt{2\pi}\ \mathrm{F}(\sigma)$$

רציפה לפי משפט רימן-לבג,קטע האינטגרציה הינו סופי ולכן האינטגרל $J(\alpha,\beta)$ קיים.

ושקול ל-

$$J(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\ f(t)dt\right]d\sigma,\quad \mathrm{x}\in\mathrm{R} \qquad (5.15)$$

יהי $m<n$ ו-$D_{m,n}=(-\infty,m]\bigcup[n,\infty)$.אזי ניתן לרשום את (5.15) בצורה הבאה:

$$J(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{m}^{n}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\ f(t)dt\right]d\sigma+\eta_{n,m}\ ,$$

$$\eta_{n,m}=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{D_{n.m}}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\ f(t)dt\right]d\sigma \qquad (5.16)$$

הפונקציה

$$f(t,\sigma,x)=\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\ f(t); \qquad (5.17)$$

$$\sigma\in[\alpha,\beta],t\in[m,n],\mathrm{x}\in\mathrm{R}$$

נתונה במלבן $[\alpha,\beta]\times[m,n]$, מקיימת את כל התנאים של משפט ארצלה לשינוי סדר האינטגרציה (הרצאה 1,סעיף 4,משפט 4.1):

1. $f(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי $t\in[\alpha,\beta]$ לכל $\sigma\in[m,n]$
2. $f(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי $\sigma\in[\alpha,\beta]$ לכל $t\in[m,n]$
3. $\sup\limits_{\substack{t\in[m,n]\\ \sigma\in[\alpha,\beta]}}\left|f(t,\sigma)\right| = \sup\limits_{\substack{t\in[m,n]\\ \sigma\in[\alpha,\beta]}}\dfrac{\left|f(t)\right|}{\sigma^2+q_0^2}\le\dfrac{1}{q_0^2}\sup\limits_{t\in[m,n]}\left|f(t)\right|\le$

הפונקציה אינטגרבילית לפי רימן על $b-a<\infty,[a,b]$

חסומה בהחלט על $[a,b]$

$$\le\frac{C(m,n)}{q_0^2},\quad \mathrm{C(m,n)}\in(0,\infty)$$

$\Leftarrow$

$$J(\alpha,\beta)=\int_m^n\left[\int_\alpha^\beta\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)dt\right]d\sigma+\eta_{n,m}\qquad(5.18)$$

נבדוק את השוויון:

$$\lim_{\substack{\eta\to\infty\\ m\to-\infty}}\eta_{n.m}=0\qquad(5.19)$$

ואכן,

$$\left|\eta_{n,m}\right| = \left|\int_\alpha^\beta \left[\int_{-\infty}^{m} \frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2} f(t)dt\right]d\sigma + \int_\alpha^\beta \left[\int_n^\infty \frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2} f(t)dt\right]d\sigma\right| \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta \frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2}\cdot\int_{-\infty}^{-m}|f(t)|dt + \int_\alpha^\beta \frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2}\cdot\int_n^\infty |f(t)|dt \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2}\cdot\left[\int_{-\infty}^{-m}|f(t)|dt + \int_n^\infty|f(t)|dt\right] =$$

$$= \frac{\pi}{q_0}[\int_{-\infty}^{-m}|f(t)|dt + \int_n^\infty |f(t)|dt] \qquad (5.20)$$

השוויון (5.19) נובע מ-$f \in L_1(R)$ ו-(5.20).כעת מ-(5.18),(5.19) ומהגדרת האינטגרל הלא מסוים נובע:

$$J(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to-\infty}} \int_m^n \left[\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2} f(t)d\sigma\right]dt + \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to-\infty}} \eta_{n,m} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2} f(t)d\sigma\right]dt \qquad (5.21)$$

קל לראות כי האינטגרל הפנימי ב-(5.21):

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2} d\sigma$ מתכנס בהחלט:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\right|d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2} = \frac{\pi}{q_0}$$

ולכן,

$$J(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)d\sigma\right]dt+\nu_{\alpha,\beta}$$

$$\nu_{\alpha,\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)d\sigma\right]dt+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)d\sigma\right]dt$$

כאשר:

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\nu_{\alpha,\beta}=0 \qquad (5.22)$$

ואכן:

$$\left|\nu_{\alpha,\beta}\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt\cdot\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2}+\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt\cdot\int_{\beta}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2+q_0^2} \quad (5.23)$$

מ-(5.23) נובע (5.22) $\Leftarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2+q_0^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma t}f(t)dt\right]d\sigma=$$

$$=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{-i\sigma x}}{\sigma^2+q_0^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma t}f(t)dt\right]d\sigma=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}J(\alpha,\beta)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)dt\right]d\sigma+\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\nu_{\alpha,\beta}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,f(t)d\sigma\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}\,d\sigma\right]dt \quad\Rightarrow$$

(ראה (5.13)):

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}d\sigma\right]f(t)dt \quad , x\in R \quad (5.25)$$

וכעת מטרתנו האחרונה,לחשב את האינטגרל הפנימי ב-(5.25):

$$\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma(t-x)}}{\sigma^2+q_0^2}d\sigma \quad , \ \alpha=t-x \quad (5.26)$$

קודם כל נשים לב כי:

$$\phi(\alpha)=\phi(-\alpha) \ : \ \alpha\geq 0 \ \text{עבור} \quad (5.27)$$

ואכן:

$$\phi(-\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma\alpha}}{\sigma^2+q_0^2}d\sigma \ =\left|\sigma:=-s\right|=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{is\alpha}}{s^2+q_0^2}(-1)ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is\alpha}}{s^2+q_0^2}ds=\phi(\alpha) \ \Rightarrow \ (5.27).$$

לפי (5.27),מספיק לנו לחשב את $\phi(|\alpha|)$ $|\alpha|>0,$.במקרה הנ"ל(בדוק!):

$$\phi(|\alpha|)=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\frac{e^{i|\alpha|z}}{z^2+q_0^2}$$

כאשר Z_k נקודות סינגולאריות מבודדות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+q_0^2}$ בתחום $\operatorname{Im} z>0$.

כאשר

$$z^2+q_0^2=0 \ \Rightarrow \ z_1=iq_0, z_2=-iq_0 \ \Rightarrow$$

לתחום $\operatorname{Im} z>0$ שייכת רק הנקודה $\Leftarrow \ z_1=iq_0$

$$\phi(|\alpha|) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=iq_0} \frac{e^{i|\alpha|z}}{z^2+q_0^2} = 2\pi i \left(\frac{e^{i|\alpha|z}}{2z}\right)\Bigg|_{z=iq_0} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i|\alpha|iq_0}}{2iq_0} = \pi \frac{e^{-|\alpha|q_0}}{2q_0} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-|t-x|q_0}}{q_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2q_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|t-x|q_0} dt}$$