לינארית 2 - מטלה 1 - דטרמיננטה

תאריך הגשה: $26-30.3.2017$ כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. מספר תרגיל
2. שם מלא
3. ת.ז
4. מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

תרגיל 1. חשב את הדטרמננטות הבאות בעזרת פיתוח לפי מינורים

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \left|3\right| + (-1)^{1+2} 2 \left|7\right|$$

והדטרמיננה של מספר הוא המספר עצמו לכן

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \left|3\right| - 2 \left|7\right| = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = -11$$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

הדטרמיננה של מטריצה 2×2 מתקבלת על ידי הנוסחא

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

ונקבל ש-

$$
\begin{aligned}
&= 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1\,(3\cdot 1 - 5\cdot 3) - 4\,(4\cdot 1 - 5\cdot 5) + 5\,(4\cdot 3 - 5\cdot 3) \\
&= -12 + 4\cdot 21 - 5\cdot 3 \\
&\quad 57
\end{aligned}
$$

.3 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי העמודה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

כידוע הדטרמיננה של מטריצה 2×2 מתקבלת על ידי הנוסחא

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

ונקבל ש-

$$
\begin{aligned}
&= 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (2\cdot 3 - 5\cdot 9) \\
&\quad -39
\end{aligned}
$$

.4 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי העמודה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

שוב נפתח לפי העמודה הראשונה ונקבל

$$1\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} &= 1\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 2\left(2\cdot 9-3\cdot 6\right) \\ &0 \end{aligned}$$

תרגיל 2. יהיו המטריצות הבאות

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

נתון ש-$|A|=5$ חשב את $|B|,|C|$.

פתרון.

כדי לחשב את הדטרמיננטה של B ניזכר שהחלפת שתי שורות מכפילה את הדטרמיננטה ב--1, לכן

$$|B|=\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{=5}=5$$

כעת כדי לחשב את הדטרמיננטה של C נזכר שהכפלת שורה ב-λ תכפיל גם את דטרמיננטה ב-λ.

$$|C|=\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{=5}=10$$

תרגיל 3. ידוע כי המספרים $61902, 6327, 86469, 31882, 23028$ מתחלקים ב-19 ללא שארית. הראה (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-19 ללא שארית .רמז: שימו לב שעמודות במטריצה הן המספרים המוזכרים בשאלה

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned} 61902 &= 6\cdot 10000+1\cdot 1000+9\cdot 100+0\cdot 10+2\cdot 1 \\ 6327 &= 0\cdot 10000+6\cdot 1000+3\cdot 100+2\cdot 10+7\cdot 1 \\ 86469 &= 8\cdot 10000+6\cdot 1000+4\cdot 100+6\cdot 10+9\cdot 1 \\ 31882 &= 3\cdot 10000+1\cdot 1000+8\cdot 100+8\cdot 10+2\cdot 1 \\ 31882 &= 2\cdot 10000+3\cdot 1000+0\cdot 100+2\cdot 10+8\cdot 1 \end{aligned}$$

לכן אם נבצע את הפעולת שורה $R_5\leftarrow R_5+10R_4+100R_3+1000R_2+10000R_1$ נקבל

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{vmatrix}$$

כעת נשתמש בנתון שהמספרים הללו ממתחלקים ב-19,

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 61902 & 6327 & 86469 & 31882 & 31882 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ \frac{61902}{19} & \frac{6327}{19} & \frac{86469}{19} & \frac{31882}{19} & \frac{31882}{19} \end{vmatrix}$$

והביטוי שקבלנו מתחלק ב-19 ללא שארית.

תרגיל 4. הוכח שהדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה היא כפל איברי האלכסון.

פתרון.

נוכיח זאת בעזרת אינדוקציה על גודל המטריצה.

$n = 2$: תהי $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ אז $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}0 = a_{11}a_{22}$

נניח את נכונות הטענה עבור n, וכעת נוכיח עבור $n+1$.

תהיה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את הדטרמיננטה נפתח לפי העמודה הראשונה ונקבל

$$|A| = (1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

זאת דטרמיננטה של מטריצה מסדר $n \times n$, לכן לפי הנחת האינדוקציה היא שווה למכפלת איברי, לכן

$$|A| = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33}a_{44} \dots a_{n+1n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}$$

תרגיל 5. חשב את הדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

פתרון.

נבצע את פעולות השורה הבאות $R_i \leftarrow R_i + R_1$ ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{R_i \leftarrow R_i + R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

קבלנו מטריצה משולשית עליונה, הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה היא כפל אברי האלכסון לכן

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

בהצלחה!!