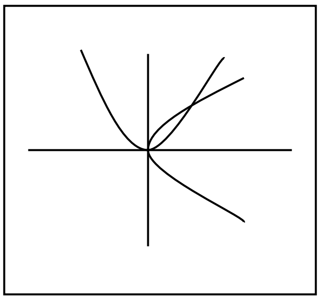
תרגיל 13 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. חשבו $\int_C 1ds$ כאשר C היא קשת הפרבולה $y^2 = 3x$ הנחתכת ע"י הפרבולה $x^2 = 3y$.
(שימו לב כי הכיוון של C לא נתון בשאלה. האם זה משנה?).
חשבו מה משמעות הגודל אותו חישבתם בסעיף זה.

פתרון:



נמצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות:

$$\begin{cases} y^2 = 3x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{3} \\ x^2 = 3y \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^2 = 3y$$

$$\frac{y^4}{9} = 3y$$

$$y^4 = 27y$$

$$y(y^3 - 27) = 0$$

$$y = 0 \qquad y^3 = 27$$

$$y = 3$$

$$(0,0) \qquad (3,3)$$

לכן, העקומה המתוארת היא קשת הפרבולה $y^2 = 3x$ בין הנקודות $(0,0)$ ו $(3,3)$.

(מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, כיוון העקומה לא משנה).

נמצא פרמטריזציה לעקומה: $y^2 = 3x \Leftarrow x = \dfrac{y^2}{3}$

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{3}, t\right), \qquad 0 \le t \le 3$$

מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, נחשב:

$$\gamma'(t) = (\frac{2t}{3},1)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\frac{2t}{3})^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4t^2}{9} + 1} = \sqrt{\frac{4t^2+9}{9}} = \frac{\sqrt{4t^2+9}}{3}$$

לכן,

$$\int_C 1ds = \int_0^3 1\cdot\frac{\sqrt{4t^2+9}}{3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{(2t)^2+3^2}\,dt$$

באמצעות הנוסחה (שלא, אתם לא אמורים לזכור בע"פ)

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

נקבל:

$$\int_C 1ds = \int_0^3 1\cdot\frac{\sqrt{4t^2+9}}{3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{(2t)^2+3^2}\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{1}{2}2t\sqrt{(2t)^2+3^2} + \frac{1}{2}3^2\ln|2t+\sqrt{(2t)^2+3^2}|}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{6^2+3^2} + \frac{1}{2}3^2\ln(6+\sqrt{6^2+3^2})}{2} - \frac{0 + \frac{1}{2}3^2\ln(0+\sqrt{0^2+3^2})}{2}\right) =$$

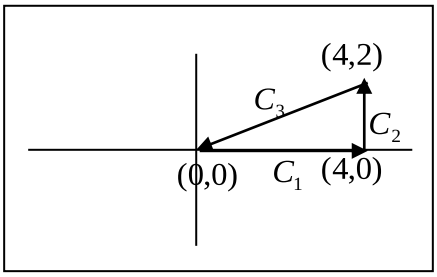
$$\frac{1}{6}\left(3\sqrt{45} + 4\frac{1}{2}\ln(6+\sqrt{45}) - 4\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{12}\left(6\sqrt{45} + 9\ln(6+\sqrt{45}) - 9\ln(3)\right) = \frac{1}{12}\left(6\sqrt{45} + 9\ln(2+\sqrt{5})\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{45} + \frac{3}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \approx 4.4368$$

2. חשבו את $\int_C xy^3 ds$ כאשר C הוא המשולש שקודקודיו $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ וכיוונו נגד כיוון השעון.

פתרון: שימו לב כי מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, על אף שמדובר על עקומה סגורה מכוונת חיובית, לא ניתן להשתמש במשפט גרין.

נצייר את העקום המתואר:



נשים לב,

$$\int_C xy^3 ds = \int_{C_1} xy^3 ds + \int_{C_2} xy^3 ds + \int_{C_3} xy^3 ds \underset{first\_type}{=} \int_{C_1} xy^3 ds + \int_{C_2} xy^3 ds + \int_{-C_3} xy^3 ds$$

כאשר C_1, C_2, C_3 הם העקומים המופיעים בציור:

נמצא פרמטריזציה לעקומים $C_1, C_2, -C_3$.

(נשים לב, אין הכרח לעבור ל $-C_3$. יכולנו למצוא פרמטריזציה ל C_3 באמצעות הנוסחה לפרמטריזציה של ישר מנקודה A לנקודה B, אבל בד"כ יותר קל לעשות פרמטריזציה לפונקציה, בפרט למשוואת ישר, משמאל לימין).

עבור C_1:

$$\gamma(t) = (t,0) \qquad 0 \le t \le 4$$
$$\gamma'(t) = (1,0)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

עבור C_2:

$$\gamma(t) = (4,t) \qquad 0 \le t \le 2$$
$$\gamma'(t) = (0,1)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

עבור $-C_3$: נמצא את משוואת הישר המתאים:

$$y - 0 = \frac{2}{4}(x - 0)$$
$$y = \frac{1}{2}x$$

מכיוון ש $-C_3$ הולך משמאל לימין:

$$\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t) \qquad 0 \le t \le 4$$
$$\gamma'(t) = (1, \frac{1}{2})$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

לכן:

$$\int_C xy^3ds = \int_{C_1} xy^3ds + \int_{C_2} xy^3ds + \int_{-C_3} xy^3ds =$$

$$\int_0^4 t\cdot 0^3\cdot 1dt + \int_0^2 4\cdot t^3\cdot 1dt + \int_0^4 t\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dt = 0 + \int_0^2 4t^3dt + \frac{\sqrt{5}}{16}\int_0^4 t^4dt = \left[t^4\right]_0^2 + \frac{\sqrt{5}}{16}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^4$$

$$= 16 + \frac{64\sqrt{5}}{5} = 16 + \frac{64}{\sqrt{5}} = 44.62$$

3. חשבו את אורך העקומות הבאות:

3.1 הקו הישר מהנקודה $(-1,3)$ לנקודה $(-2,4)$.

פתרון: עלינו לחשב $\int_C 1ds$ כאשר C הוא הישר מהנקודה $(-1,3)$ לנקודה $(-2,4)$.

נמצא פרמטריזציה ל C.

$$\gamma(t) = (1-t)(-1,3) + t(-2,4) \qquad 0\le t\le 1$$
$$\gamma(t) = (-1+t, 3-3t) + (-2t, 4t)$$
$$\gamma(t) = (-1-t, 3+t)$$

נחשב:

$$\gamma'(t) = (-1,1)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

לכן, האורך המבוקש הוא:

$$Length = \int_C 1ds = \int_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}$$

(ניתן לחשב באמצעות פיתגורס, או הנוסחה למרחק בין שתי נקודות ולראות כי זהו אכן אורך הקטע).

3.2 האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

פתרון: עלינו לחשב $\int_C 1ds$ כאשר C הוא האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

נמצא פרמטריזציה ל C.

$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \qquad 0\le t\le 2\pi$$

נחשב:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 3\cos t)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 5\cos^2 t} = \sqrt{4 + 5\cos^2 t}$$

לכן, האורך המבוקש הוא:

$$Length = \int_0^{2\pi} \sqrt{4+5\cos^2 t}\,dt$$

אין צורך לדעת לחשב אינטגרל זה, לכן, נשאיר את התשובה כך.

(במבחן, *אם* יהיה תרגיל עם אינטגרציה מסובכת, הנוסחה לאינטגרל תופיע בדף הנוסחאות, וכל שיהיה צורך לעשות הוא להשתמש בה, כמו בשאלה האחרונה בתרגיל הקודם).

4. חשבו את אורך גרף הפונקציה עבור הפונקציות הבאות:

4.1. $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ עבור $1\le x\le 2$.

פתרון:
נשתמש בנוסחה לאורך גרף של פונקציה $y=f(x)$ בתחום $a\le x\le b$:

$$length=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

אצלינו: $f'(x)=y'=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$
והתחום: $1\le x\le 2$.

לכן,

$$length=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}x^4-2\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx=$$
$$\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{4}x^4+2\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx=$$
$$\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{x^{-2}}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{x^{-1}}{-2}\right]_1^2=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2x}\right]_1^2=$$
$$\left(\frac{8}{6}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=1\frac{5}{12}$$

4.2. $y=x^2-\frac{1}{8}\ln x$ עבור $1\le x\le 3$.

פתרון:
נשתמש בנוסחה לאורך גרף של פונקציה $y=f(x)$ בתחום $a\le x\le b$:

$$length=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

אצלינו: $f'(x)=y'=2x-\frac{1}{8x}$
והתחום: $1\le x\le 3$.

לכן,

$$length=\int_1^3\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+4x^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}+\frac{1}{64x^2}}\,dx=$$

$$\int_1^3\sqrt{1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx=\int_1^3\sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx=\int_1^3\sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx=\int_1^3\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx$$

$$=\left[x^2+\frac{1}{8}\ln x\right]_1^3=\left(9+\frac{1}{8}\ln 3\right)-1=8+\frac{1}{8}\ln 3=8.137$$

.5 חשבו את האינטגרלים הקוויים הבאים:

5.1. $\int_C -ydx+xdy$ לאורך $y^2=3x$ מהנקודה $(0,0)$ עד לנקודה $(3,3)$.

5.2. $\int_C -ydx+xdy$ לאורך $y^2=3x$ מהנקודה $(3,3)$ עד לנקודה $(0,0)$.

5.3. $\int_C xydx+(y-x)dy$ לאורך $y=x^3$ מהנקודה $(1,1)$ עד לנקודה $(0,0)$.

5.4. $\int_C ydx+xdy$ כאשר C הוא המעגל $x=R\cos t, y=R\sin t$ מ $t=0$ ל $t=2\pi$.

5.5. $\oint_C 3xydx+2xydy$ כאשר C היא המלבן החסום ע"י הישרים $x=-2, x=4, y=1, y=2$.

5.6. $\oint_C \ln(1+y)dx-\frac{xy}{1+y}dy$ כאשר C היא המשולש שקודקודיו הם $(0,0),(2,0),(0,4)$.

5.7. $\oint_C (2xy-y)dx+x^2dy$ כאשר C היא המעגל $x^2+y^2=R^2$.

בהצלחה! ☺

1 ש.1 $\int_c -ydx+xdy$ לאורך $y^2=3x$ מהנקודה (0,0) עד נקודה (3,3).

נמצא פרמטריזציה לעקומה C:

$$x=\frac{y^2}{3}$$

$$\gamma(t)=\left(\frac{t^2}{3},\ t\right)\qquad 0\le t\le 3$$

לכן: $\int_c -ydx+xdy=\int_0^3\left(-t\cdot\frac{2t}{3}+\frac{t^2}{3}\right)dt=\int_0^3\left(-\frac{2t^2}{3}+\frac{t^2}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^3 t^2\,dt$

$$=-\frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\Big|_0^3=-\frac{27}{9}=-3$$

ש.2 $\int_c -ydx+xdy$ לאורך $y^2=3x$ מהנקודה (3,3) עד לנקודה (0,0).

פתרון: $\int_c -ydx+xdy=-\int_{-c} -ydx+xdy=-(-3)=3$

לפי שאלה 2.1

($-C=$ העקומה $y^2=3x$ מ (3,3) עד ל (0,0)).

ש.3 $\int_c xydx+(y-x)dy$ לאורך $y=x^3$ מהנקודה (1,1) עד לנקודה (0,0).

פתרון: נמצא פרמטריזציה ל $-C$:

$$\gamma(t)=(t,t^3)\qquad 0\le t\le 1$$

המשך

לכן:
$$\int_C xy\,dx+(y-x)\,dy = -\int_{-C} xy\,dx+(y-x)\,dy = -\int_0^1 \left(t^4\cdot 1+(t^3-t)\cdot 3t^2\right)dt$$

$$= -\int_0^1 (t^4+3t^5-3t^3)\,dt = -\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{2}-\frac{3}{4}t^4\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right) = -\left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{20}$$

4.4 $\int_C y\,dx+x\,dy$ כאשר C הוא מעגל שלם

$x=R\cos t\,,\ y=R\sin t$ מ $t=0$ ו $t=2\pi$;

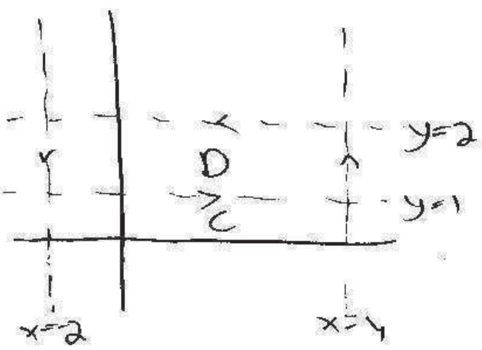
$$\int_C y\,dx+x\,dy = \int_0^{2\pi} \left(R\sin t(-R\sin t)+R\cos t(R\cos t)\right)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t)\,dt = R^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-\sin^2 t)\,dt = R^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{R^2\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

4.5 $\oint_C 3xy\,dx+2xy\,dy$ כאשר C הוא המלבן החסום ע"י הישרים

$x=-2,\ x=4,\ y=1,\ y=2$



פתרון: נשרטט את המלבן המתואר

נשתמש במשפט גרין:

נסמן:

$P=3xy \qquad P_y=3x$

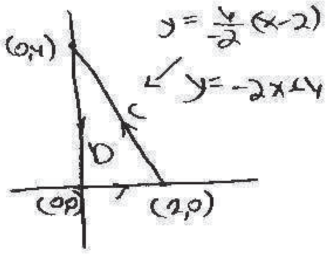
$Q=2xy \qquad Q_x=2y$

לכן לפי משפט גרין:

$$\oint_C 3xy\,dx+2xy\,dy = \iint_{D}(2y-3x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{4}\int_1^2 (2y-3x)\,dy\,dx = \int_{-2}^{4} y^2-3xy\Big|_1^2\,dx$$

$$= \int_{-2}^{4}(4-6x)-(1-3x)\,dx = \int_{-2}^{4}(3-3x)\,dx = 3x-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-2}^{4} = 12-24-(-6-6) = -12+12=0$$

שאלה 6: $\oint_C \ln(1+y)\,dx - \frac{xy}{1+y}\,dy$ כאשר C הוא המשולש שקדקודיו הם (0,4), (2,0), (0,0).



פתרון: נסמן

$P=\ln(1+y)$ $\quad P_y=\frac{1}{1+y}$

$Q=-\frac{xy}{1+y}$ $\quad Q_x=-\frac{y}{1+y}$

לכן, לפי משפט גרין:

$$\oint \ln(1+y)\,dx-\frac{xy}{1+y}\,dy=\iint_D\left(-\frac{y}{1+y}-\frac{1}{1+y}\right)dx\,dy=\int_0^2\int_0^{-2x+4}-\frac{y+1}{y+1}\,dy\,dx$$

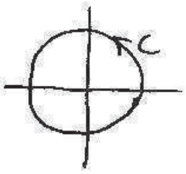
$$=\int_0^2\int_0^{-2x+4}-1\,dy\,dx=\int_0^2 -y\Big|_0^{-2x+4}dx=\int_0^2(2x-4)\,dx=x^2-4x\Big|_0^2=4-8=-4$$

שאלה 7: $\oint_C (2xy-y)\,dx+x^2\,dy$ כאשר C הוא המעגל $x^2+y^2=R^2$.

פתרון: נשתמש במשפט גרין

$P=2xy-y$ $\quad P_y=2x-1$

$Q=x^2$ $\quad Q_x=2x$



לכן, לפי משפט גרין:

$$\oint_C(2xy-y)\,dx+x^2\,dy=\iint_{x^2+y^2\le R^2}(2x-(2x-1))\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le R^2}1\,dx\,dy=\text{שטח העיגול }x^2+y^2\le R^2=\pi R^2$$