מבחן מבוא לאלגברה לינארית ביולוגים תשפא -פתרון

ענו על השאלות הבאות:

1. תהא מערכת המשוואות

$$\begin{array}{rcl} x+3y+3z & = & 1 \\ x+(a+4)\,y+\left(-a^2+4a-1\right)z & = & 4 \\ -2x-6y+\left(a^2-4a-2\right)z & = & a-4 \end{array}$$

התלויה בפרמטר $a \in \mathbb{R}$.

(א) קבעו עבור אילו ערכי a למערכת:

- יש פתרון יחיד.
- יש אינסוף פתרונות.
- אין פתרון.

(ב) במידה וקיים a עבורו למערכת יש אינסוף פתרונות - בחרו a כזה ומצאו את אוסף הפתרונות למערכת עבור a זה ("הפתרון הכללי").

פתרון: נציג את המערכת ע"י מטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ -2 & -6 & a^2-4a-2 & a-4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -a^2+4a-4 & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)^2 & a-2 \end{array}\right)$$

כעת,

- אם $a \neq -1, 2$ נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד למערכת.
- אם $a=-1$ נקבל את המערכת (ונמשיך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- נציב t במשתנה החופשי ונקבל $y=t$, $z=-\dfrac{1}{3}$ ו-$x=2-3t$.

- אם $a=2$ נקבל את המערכת (ונמשיך לדרג לצורה קנונית)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

במקרה זה, נציב t במשתנה z (שהוא המשתנה החופשי היחידי) ונקבל שהפתרון הכללי למערכת הוא

$$\left\{\begin{pmatrix} -2-3t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

2. תהא $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. נסמן את מרחב העמודות של A ב $C(A)$ ונסמן את מרחב השורות של A ב $R(A)$ ונחשוב על שניהם כתתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו בסיס ל $R(A)$

(ב) מצאו בסיס ל $C(A)$

(ג) הציגו את $C(A)$ על ידי מערכת משוואות.

(ד) קבעו האם A הפיכה. במידה ו A הפיכה, חשבו את ההפוכית שלה (A^{-1}).

פתרון: נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ -2 & 4 & -2 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y \\ 2 & -1 & 0 & x \\ -2 & 4 & -2 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & -3 & 2 & x-2y \\ 0 & 6 & -4 & z+2y \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & -3 & 2 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & z-2y+2x \end{array}\right)$$

ולכן:

$$R(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z-2y+2x=0\right\}$$

ו A אינה הפיכה.

3. תהא

$$B=\begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 19 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

מטריצה הפיכה.

(א) מצאו את ההופכית שלה (מצאו את B^{-1})

(ב) מצאו את הפתרון למערכת

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & -8 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$.

פתרון: נתחיל עם חישוב הפ״א

$$\begin{aligned}
p_A(x) = |xI - A| &= \left|\begin{pmatrix} x-1 & -3 & 6 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix}\right| \\
&\overset{[R_1-R_3]}{=} \left|\begin{pmatrix} x+2 & 0 & -x-2 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix}\right| \\
&= (x+2)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & x-2 & 8 \\ -3 & -3 & x+8 \end{pmatrix}\right| \\
&\overset{[C_3+C_1]}{=} (x+2)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & x-2 & 4 \\ -3 & -3 & x+5 \end{pmatrix}\right| \\
&= (x+2)\left|\begin{pmatrix} x-2 & 4 \\ -3 & x+5 \end{pmatrix}\right| \\
&= (x+2)\left[(x-2)(x+5)+12\right] \\
&= (x+2)\left[x^2+3x+2\right] \\
&= (x+2)(x+2)(x+1)
\end{aligned}$$

ולכן $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ ע״ע של A. נחשב מ״ע

עבור $V_{-1} = N(A+I)$ נחשב

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1.5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} t\\ \frac{4}{3}t\\ t\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $V_{-2}=N(A+2I)$ נחשב

$$A+2I=\begin{pmatrix}3&3&-6\\4&4&-8\\3&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-2}=\left\{\begin{pmatrix}2t-s\\ s\\ t\end{pmatrix} \mid t,s\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו שיש 3 ו״ע בת״ל, $v_1=\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ולכן A לכסינה. מכיוון ש

$$Av_1=\lambda_1v_1, Av_2=\lambda_2v_2, Av_3=\lambda_2v_3$$

נקבל שעבור P שעמודותיה הן v_1,v_2,v_3 נקבל ש

$$P^{-1}AP=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-2\end{pmatrix}}_{D}$$

שאלות מיטיבות

1. במרחב $V=\mathbb{R}^4$ חשבו את ההטלה של $v=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$ על $w=\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

$$\pi_w(v)=\frac{6}{17.25}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{8}{23}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{23}\\ \frac{4}{23}\\ \frac{16}{23}\\ \frac{24}{23}\end{pmatrix}$$

2. במרחב $V = \mathbb{R}^4$ חשבו את הזווית בין $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ל $w = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{23}\sqrt{18}}$$

3. נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

חשבו את ההופכית של המטריצה B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 13 & 21 \\ & 21 & 34 \end{pmatrix}$$

$$(B^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 34 & -21 \\ & -21 & 13 \end{pmatrix}$$