טופולוגיה 88222

02.08.2012

פתרון מבחן בטופולוגיה מועד א 2012

שאלות 1 , 3 א -- ראו הרצאות.

שאלות 2 , 4 -- שיעורי בית.

<u>שאלה 3 ב</u>: יהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A \neq \mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

<u>פתרון</u>: נניח $z \in \mathbb{R} \setminus A$ נקודה במשלים .

נסמן $A_1 := (-\infty, z) \cap A, \quad A_2 := (z, \infty) \cap A$.

בודקים ש $A = A_1 \cup A_2$ פירוק טופולוגי של A.

נימוק: ברור $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ (כי $(-\infty, z) \cap (z, \infty) = \varnothing$).

$A_1 := (-\infty, z) \cap A, A_2 := (z, \infty) \cap A$ קבוצות פתוחות ב A ע"פ הגדרת טופולוגית תת מרחב.

$A_1 := (-\infty, z) \cap A \neq \varnothing, \quad A_2 := (z, \infty) \cap A \neq \varnothing$ כי A צפוף ב $\mathbb{R}$.

<u>שאלה 5</u>: יהי M מרחב מטרי, ונניח שיש $a \in M$ שהיא נקודת הצטברות של M.

יהי A תת מרחב הבא של $\mathbb{R}$: $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

הראה שקיים שיכון $g : A \to M$.

(כזכור שיכון הוא העתקה שהיא הומאומורפיזם על תמונתה).

<u>פתרון</u>:

$a \in M$ נקודת הצטברות של M. לכן קיימת סדרה a_n ב M כך ש
$\lim a_n = a$ עם איברים שונים וגם $a_n \neq a$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

אזי הפונקציה

$$g: A \to M, \quad g(\tfrac{1}{n}) = a_n ,\, g(0) = a$$

היא חח"ע.

רעיון הוכחה ש $g: A \to M$ שיכון:

לפי משפט ידוע מהרצאות כל פונקציה רציפה ממרחב קומפקטי לתוך מרחב האוסדורף היא פונקציה סגורה. במצב כזה אם הפונקציה היא גם חח"ע אז שיכון טופולוגי.

(אפשר להוכיח ש $g: A \to M$ שיכון גם בדרך אחרת).

במקרה שלנו A מרחב קומפקטי כי A חסום וסגור בממשיים (מקרה פרטי של משפט היינה-בורל).

A סגורה כיון שהמשלים שלה הוא

$$(-\infty,0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}) \cup (1,\infty)$$

M הוא מרחב מטרי לכן גם עם תכונת האוסדורף.

פונקציה g היא חח"ע לכן לפי משפט הנ"ל מספיק כעת רק להוכיח רציפות של g.

נבדוק למשל דרך רציפות בכל נקודה $z \in A$.

צ"ל שלכל סביבה U של $g(z)$ במרחב M קיימת סביבה V של z ב A כך ש $g(V) \subseteq U$.

<u>מקרה</u>1: $z = \frac{1}{n_0}$.

$z = \frac{1}{n_0}$ נקודה מבודדת במרחב A ולכן $V = \{\frac{1}{n_0}\}$ סביבה שלה. ברור שאז $g(V) = g(z) \in U$.

<u>מקרה</u>2: $z = 0$.

בגלל $\lim a_n = a = g(0)$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש

$\forall n > m \quad a_n = g(\frac{1}{n}) \in U$.

נגדיר סביבה $V := (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}) \cap A$ של $z = 0$ במרחב A.

אז נקבל $g(x) \in U \quad \forall x \in V$.

הוכחנו רציפות של g.

מש"ל