פיתרון לתרגיל מספר 10 (ואחרון) :

תשובה 1:

א. לא נכון. $2Z \cup 3Z$ אינו אידיאל ב Z : -2 איבר ב $2Z \cup 3Z$ 3 איבר ב $2Z \cup 3Z$ אבל $1=3+(-2)$ אינו איבר ב $2Z \cup 3Z$. אין סגירות לחיבור לכן $2Z \cup 3Z$ אינו אידיאל.

ב. Z הוא תת חוג של Q (שדה הרציונלים) כל איבר ב Z למעט 1 ו- -1 אינו הפיך ב Z וכן הפיך ב Q.

ג. לא נכון. העתקת האפס היא דוגמא נגדית. אם עם זאת לא מדובר בהעתקת האפס הגרעין הוא אידיאל אמיתי, מאחר והתחום כאן הוא שדה ומאחר שבשדה האידיאל האמיתי היחיד הוא 0 הגרעין הוא 0 לכן ההעתקה היא חח"ע.

ד. $A \cap B$ הוא אידיאל ראשוני. $AB \subseteq A \cap B$ לכן $A \subseteq A \cap B$ או $B \subseteq A \cap B$ ההכלות ההפוכות מתקיימות בצורה טריוויאלית. לכן $A = A \cap B$ או $B = A \cap B$.

תשובה 2:

$\varphi^{-1}(P) = \{a \in R : \varphi(a) \in P\}$. יהיו $a, b \epsilon R$ כך ש $ab \epsilon \varphi^{-1}(P)$ ז"א $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in P$ לכן מאחר ש P ראשוני $\varphi(a) \in P$ או $\varphi(b) \in P$ ז"א $a \, \epsilon \varphi^{-1}(P)$ או $b \epsilon \varphi^{-1}(P)$.
הטענה השניה אינה בהכרח נכונה. לדוגמא תהי $f: Z \to Z \times Z$ ההכלה ברכיב הראשון, ז"א $f(x) = (x, 0)$ זהו הומומורפיזם. עבור p ראשוני $Z \times pZ$ מקסימלי אבל $\varphi^{-1}(Z \times pZ) = Z$ אינו אידיאל אמיתי בבתחום לכן בפרט לא מקסימלי. (הרעיון כאן הוא לקחת העתקה שאינה על).

תשובה 3:

האידיאלים של Z_{49} הם $Z_{49}, 7Z_{49}, 49Z_{49}$. המקסימלי הוא $7Z_{49}$.
האידיאלים של Z_{42} הם $Z_{42}, 2Z_{42}, 3Z_{42}, 6Z_{42}, 7Z_{42}, 14Z_{42}, 21Z_{42}, 42Z_{42}$. המקסימליים הם $7Z_{42}, 2Z_{42}, 3Z_{42}$.

תשובה 4:

הבסיס של חוג המנה כמרחב וקטורי מעל Q הוא $\{\bar{1}, \bar{x}\}$, כאשר $\bar{x}^2 = -\bar{1}$ (כאשר נסמן $\overline{m(x)} = m(x) + \langle x^2+1 \rangle \in Q[x]/\langle x^2+1 \rangle$).
נרשום במפורש : $Q[x]/\langle x^2+1 \rangle = \{a \cdot \bar{1} + b \cdot \bar{x} : a, b \in Q\}$.

כעת נבנה העתקה $\varphi : Q[x]/\langle x^2+1 \rangle \to Q[i]$ כאשר $\varphi(a \cdot \bar{1} + b \cdot \bar{x}) = a + bi$

נבדוק ש- φ הומומורפיזם:
חיבור :

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(a_1 \cdot \bar{1} + b_1 \cdot \bar{x} + a_2 \cdot \bar{1} + b_2 \cdot \bar{x}) = \varphi((a_1 + a_2) \cdot \bar{1} + (b_1 + b_2) \cdot \bar{x}) =$$
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i = a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i = \varphi(g_1) + \varphi(g_2)$$

כפל:

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi((a_1 \cdot \bar{1} + b_1 \cdot \bar{x})(a_2 \cdot \bar{1} + b_2 \cdot \bar{x})) = \varphi(a_1 a_2 \cdot \bar{1} + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\bar{x} + b_1 b_2 \cdot \bar{x}^2)$$
$$= \varphi((a_1 a_2 - b_1 b_2) \cdot \bar{1} + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\bar{x}) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i =$$
$$= (a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

נבדוק שזהו איזומורפיזם.

φ על כיוון שלכל $a+b\cdot i\in Q[i]$ יש מקור $a\cdot\overline{1}+b\cdot\overline{x}$.

φ חח"ע כיוון ש-

$$Ker\varphi=\left\{a\cdot\overline{1}+b\cdot\overline{x}\mid\varphi\left(a\cdot\overline{1}+b\cdot\overline{x}\right)=0=0\cdot1+0\cdot i\right\}=\left\{a\cdot\overline{1}+b\cdot\overline{x}\mid a=0,b=0\right\}=\{0\},$$

לכן φ איזומורפיזם.

<u>תשובה 5:</u>

א. כפליות: הוכחה טכנית לחלוטין. לגבי האיברים ההפיכים, הוכחנו בתרגיל.

ב. נסתכל על הנורמה ב- $Z[\sqrt{-5}]$: $n(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$ אזי: $n(x*y) = n(x)*n(y)$. נניח ש- $x*y=7$ באשר x,y אינם הפיכים. אז $n(x)*n(y)=n(7) = 7^2+5*0 =49$. x ו- y אי פריקים לכן n(x) ו- n(y) אינם שוים ל – 1 לכן $n(x)= n(y)=7$ אבל אין a,b שלמים כך ש $a^2+5b^2 =7$.

נשים לב ש- $(4+\sqrt{-5})*(4-\sqrt{-5}) = 3*7$ ולכן $7 \mid (4+\sqrt{-5})*(4-\sqrt{-5})$ אבל 7 לא מחלק אף אחד מהגורמים.

לכן 7 אינו ראשוני.

ג. $n(x)*n(y)=n(4+\sqrt{-5})=21$ x,y אי פריקים לכן n(x) ו- n(y) אינם שוים ל – 1 לכן נניח בה"כ ש $n(x)=7$ אבל אין a,b שלמים כך ש $a^2+5b^2 =7$. לכן $4+\sqrt{-5}$ אי פריק.

<u>תשובה 6:</u>

בחוג אויקלידי לכל $a,b\in R$ שונים מאפס $d(a)\le d(ab)$ בפרט $d(1)\le d(1x)=d(x)$.

אם x הפיך אזי $d(1)=d(xx^{-1})\ge d(x)$ ומאי השוויון החלש הקודם נקבל שיוויון.

נניח $d(x)=d(1)$. $1=qx+r$ עם $r=0$ או $d(r)<1$ לפי הטענה הראשונה האפשרות השניה בלתי אפשרית לכן $r=0$ לכן $1=qx$ לכן $q=x^{-1}$ דהיינו x הפיך.

<u>תשובה 7:</u>

1.

א. הפולינום x^4-1 בהחלט פריק מעל Z_5. Z_5 הוא שדה סופי מסדר 5. לכן $Z_5\backslash\{0\}$ היא חבורה ציקלית כפלית (לפי משפט) (כפי שאנו יודעים כבר מתורת החבורות במקרה ספציפי זה)מסדר 4. בפרט סדר של כל איבר חלק את סדר החבורה, לכן $a^4=1$ לכל $a\epsilon Z_5\backslash\{0\}$ לכן כל איבר ב $Z_5\backslash\{0\}$ הוא שורש של הפולינום. דהיינו $x^4-1=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ מעל Z_5 זהו בדיוק הפולינום $(x-1)(x-2)(x+2)(x+1)=(x^2-1)(x^2+1$

ב. לא נכון: $(2-\sqrt{-10})(2+\sqrt{-10}) = 2*7 = 14$.

ג. לא נכון. מהנימוקים שצוינו בסעיף 1 $F_9\backslash\{0\}$ היא חבורה ציקלית ביחס לכפל מסדר 8 דהיינו $F_9\backslash\{0\}\cong Z_8$ שאינה איזומורפית ל $Z_4\times Z_2$ (האקספוננט שונה כמובן).

ד. לא נכון . Z_{25} אינו תחום שלמות בכלל ! $5\cdot5=0$.

2. $3^3 = 27$ ולכן צריך למצוא פולינום אי פריק מדרגה 3 מעל Z_3. דוגמא לפולינום כזה היא $f(x) = x^3+2x+1$ (בדקו ש- 0,1,2 אינם שורשים של f).

3. ניתן להראות זאת ע"י הצבת כל ערכי Z_5 ב- x^2-2 והבחנה שאף אחד מהם אינו שורש.

4.נשים לב ש- $f(x) = x^2+x+1$ הוא פולינום אי פריק מעל Z_5 ולכן $Z_5[x]/\langle f\rangle$ הוא שדה מסדר 25 שבו יש שורש ל-f (השורש הוא $a:=x+\langle f\rangle$). אבל קיים רק שדה אחד מסדר 25 (עד כדי איזומור') ולכן $Z_5[x]/\langle f\rangle$ איזומורפי ל- $Z_5[x]/\langle x^2-2\rangle$, ז"א שב- $Z_5[x]/\langle x^2-2\rangle$ יש פתרון למשוואה $f(a)=0$.